UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Geometria I
B. Geometria

Prof.ssa Silvia Pianta

Anno accademico 2021/2022

Indice

Errata corrige della dispensa del corso di **Geometria**

- Pag. 9, Esempio 1.3: sostituire $(\mathbf{v},\mathbf{w}) \longmapsto \mathbf{v}-\mathbf{w}$ con $(\mathbf{v},\mathbf{w}) \longmapsto \mathbf{w}-\mathbf{v}$.
- Pag. 22, Paragrafo 1.1: Nella terz'ultima riga, sostituire $\tau_{\mathbf{a}}(P)$ con $\tau_{\mathbf{v}}(P)$. Inoltre, sostituire $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{a}$ con $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{v}$ sia nella terzultima sia nell'ultima riga.
- Pag. 42, riga 4: sostituire $\lambda c_0 + \rho\mu c_1$ con $\lambda c_0 + \mu c_1$.
- Pag. 60, riga 11: sostituire $b(\mathbf{u},\mathbf{v})$ con $b(\mathbf{v},\mathbf{w})$.
- Pag. 61, sest'ultima riga: sostituire $b(\mathbf{v},\mathbf{w})$ con $b(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
- Pag. 91, ultima riga: sostituire $W \cap W^\perp = \emptyset$ con $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$
- Pag. 129: sostituire $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Pag. 136, ultima riga: sostituire $A\mathbf{x_0} = 0$ con $A\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$.
- Pag. 137, riga 5: sostituire $A\mathbf{x} = 0$ con $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Pag. 138, riga 9: sostituire $\mathbf{x} = <\mathbf{x}>^\perp$ con $\mathbf{x} \in <\mathbf{x}>^\perp$
- Pag. 152, riga 3: sostituire $\frac{a_{11}}{a_1^2}$ con $\frac{a_{11}}{a_{12}}$ e $\frac{a_{22}}{a_1^2}$ con $-\frac{a_{22}}{a_{12}}$.
- Pag. 152, riga 10: sostituire D_a con D_∞.

Capitolo 1

Spazi Affini

Definizione 1.1. *Sia $V = V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\mathscr{A}$ un insieme non vuoto i cui elementi sono detti* ***punti****. Sia*

$$a : \begin{cases} \mathscr{A} \times \mathscr{A} & \longrightarrow & V \\ (P, Q) & \longmapsto & a(P,Q) =: \overrightarrow{PQ} \end{cases}$$

una funzione. La terna $[\mathscr{A}, V(\mathbb{K}), a]$ si definisce ***spazio affine associato allo spazio vettoriale*** *V, in simboli $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V)$, se valgono i seguenti assiomi:*

(SA1) $\forall\ P \in \mathscr{A},\ \forall\ \boldsymbol{v} \in V\ \exists!\ Q \in \mathscr{A}\ : \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v}$;

(SA2) $\forall\ P, Q, R \in \mathscr{A}\ :\ \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Se lo spazio vettoriale V ha dimensione $n < \infty$, diremo che $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V)$ ha dimensione n e scriveremo $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$. Per $n = 1$ abbiamo che $\mathbb{A}_1(\mathscr{A}, V)$ è la **retta affine**; per $n = 2$ lo spazio $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ è il **piano affine**.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ è il campo reale, parleremo di **spazio affine reale**; se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, parleremo di **spazio affine complesso**.

Esempio 1.2. *La retta, il piano e lo spazio ordinari sono, rispettivamente, una retta affine reale, un piano affine reale e uno spazio affine tridimensionale reale associati agli spazi vettoriali 2 e 3 dimensionale dei vettori geometrici.*

Esempio 1.3. *Ogni spazio vettoriale $V = V(\mathbb{K})$ si può considerare come spazio affine su se stesso $\mathbb{A}(V, V)$.*

I*nfatti l'applicazione*

$$- \ : \begin{cases} V \times V & \longrightarrow & V \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) & \longmapsto & \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \end{cases},$$

soddisfa gli assiomi (SA1) e (SA2), quindi $[V, V(\mathbb{K}), -]$ *è uno spazio affine. Proviamolo:*

- $\forall\ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} \in V$, *posto* $\boldsymbol{q} := \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}$, *si ha* $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}$ *e tale* $\boldsymbol{q}$ *è univocamente determinato, per cui vale (SA1).*
- $\forall\ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in V\ :\ \boldsymbol{r} - \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}) + (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p})$, *per cui è soddisfatto (SA2).*

In particolare, se consideriamo $V(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$, *lo spazio affine* $\mathbb{A}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) =: \mathbb{A}_n(\mathbb{K})$ *viene detto lo* ***spazio affine numerico di dimensione*** n ***sul campo*** $\mathbb{K}$.

Osservazione 1.4. *Se nello spazio affine* $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V)$ *si fissa un punto* $O \in \mathscr{A}$, *viene definita la funzione*

$$\varphi_O : \begin{cases} \mathscr{A} & \longrightarrow & V \\ P & \longmapsto & \overrightarrow{OP} \end{cases}$$

che, per l'assioma (SA1) è una bijezione.

Vediamo le prime proprietà di $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V)$.

Proposizione 1.5. *Valgono i seguenti fatti:*

(a) *per ogni* $X \in \mathscr{A}$ *si ha* $\overrightarrow{XX} = \mathbf{0}$;

(b) *per ogni* $P, Q \in \mathscr{A}$ *si ha che* $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow P = Q$;

(c) *per ogni* $P, Q \in \mathscr{A}$ *si ha* $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$;

(d) ***(Regola del parallelogrammo)*** *per ogni* $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathscr{A}$ *si ha*

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2} \Longleftrightarrow \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}\ .$$

Dimostrazione.

(a) Sia $X \in \mathscr{A}$. Si applica (SA2) per $P = Q = R = X$, per cui $\overrightarrow{XX} + \overrightarrow{XX} = \overrightarrow{XX}$, dunque $\overrightarrow{XX} = \mathbf{0}$.

(b) Segue dal punto (a) e dall'assioma (SA1).

(c) Siano $P, Q \in \mathscr{A}$. Per (SA2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$, dunque $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

(d) Siano $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathscr{A}$, applicando (SA2) si ha

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2Q_1} = \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{P_2Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2} \quad \text{se e solo se} \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}\ .$$

$\square$

Osservazione 1.6. *Il punto (c) della precedente proposizione implica immediatamente che nell'assioma (SA1) è possibile scambiare il ruolo dei punti P e Q; infatti per (SA1) $\forall\, Q \in \mathscr{A},\ \forall\, \boldsymbol{v} \in V\ \exists!\ P \in \mathscr{A}$ tale che $\overrightarrow{QP} = -\boldsymbol{v}$, ovvero tale che $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v}$*

1 Traslazioni

In uno spazio affine $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V) = [\mathscr{A}, V(\mathbb{K}), a]$ fissiamo un vettore $\boldsymbol{v} \in V$. Per (SA1), per ogni punto $P \in \mathscr{A}$ esiste uno ed un solo punto $Q \in \mathscr{A}$ tale che $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v}$. Risulta pertanto definita l'applicazione

$$\tau_{\boldsymbol{v}} : \begin{cases} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ P & \longmapsto & Q \end{cases}, \text{ con } \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v}.$$

Tale applicazione è detta **traslazione di vettore $\boldsymbol{v}$**.

Osservazione 1.7. *Se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, allora risulta $\tau_{\mathbf{0}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$.*

Proposizione 1.8. *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) per ogni $\boldsymbol{v} \in V(\mathbb{K})$, l'applicazione $\tau_{\boldsymbol{v}}$ è una bijezione di $\mathscr{A}$;

(b) fissati due punti $P, Q \in \mathscr{A}$, esiste una e una sola traslazione $\tau_{\boldsymbol{v}}$ tale che $\tau_{\boldsymbol{v}}(P) = Q$;

(c) l'insieme $\mathcal{T}$ delle traslazioni costituisce un gruppo abeliano $(\mathcal{T}, \circ)$ rispetto alla composizione "$\circ$" di funzioni, isomorfo a $(V, +)$, con

$$\forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\ :\ (\tau_{\boldsymbol{v}})^{-1} = \tau_{-\boldsymbol{v}}, \quad \tau_{\boldsymbol{v}} \circ \tau_{\boldsymbol{w}} = \tau_{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}} = \tau_{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}} = \tau_{\boldsymbol{w}} \circ \tau_{\boldsymbol{v}}.$$

Dimostrazione.

(a) Segue dall'Osservazione (1.6).

(b) Basta porre $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$.

(c) Per quanto visto, se $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$ allora $\overrightarrow{QP} = -\boldsymbol{v}$ e $\tau_{\overrightarrow{QR}} \circ \tau_{\overrightarrow{PQ}} = \tau_{\overrightarrow{PR}} = \tau_{\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}}$.

□

1.1 Traslazioni nello spazio affine standard $\mathbb{A}(V, V)$

Se nello spazio affine $\mathbb{A}(V, V) = [V, V(\mathbb{K}), -]$ fissiamo un vettore $\boldsymbol{v} \in V$, la traslazione $\tau_{\boldsymbol{v}}$ assumerà la forma:

$$\tau_{\boldsymbol{v}} : \begin{cases} V & \longrightarrow & V \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \end{cases} .$$

Notiamo che le traslazioni risultano essere bijezioni dell'insieme V dei vettori su se stesso, ma non sono automorfismi dello spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$, infatti le traslazioni diverse dall'identità non fissano $\mathbf{0}$.

2 Sottospazi affini

Definizione 1.9. *In $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V)$ si dice* ***sottospazio affine (o lineare)*** *un insieme $S \subseteq \mathscr{A}$ costituito da tutti e soli i traslati di un punto P, detto* ***origine del sottospazio****, mediante i vettori di un sottospazio vettoriale W di V. In simboli*

$$S := \{\tau_{\boldsymbol{w}}(P) \ : \ w \in W\} =: \tau_W(P) = \{Q \in \mathscr{A} \ : \ \overrightarrow{PQ} \in W\} =: [P, W].$$

Se W_h è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h, diremo che $S_h = [P, W_h]$ è un ***sottospazio affine di dimensione*** *h.*

Osservazione 1.10. *Sia $S = [P, W]$ un sottospazio affine. Poiché $\mathbf{0} \in W$ e $\tau_{\mathbf{0}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$, l'origine P appartiene ad S.*

Consideriamo $S_h = [P, W_h]$ e vediamo alcuni casi particolari.

- Se $h = 0$, allora $W_0 = \mathbf{0}$. Risulta $S_0 = \{P\}$, cioè i punti sono identificabili con i sottospazi affini di dimensione 0.
- Se $h = 1$ abbiamo le rette, sottospazi affini di dimensione 1.
- Se $h = 2$ abbiamo i piani, sottospazi affini di dimensione 2.
- Se $h = n - 1$ abbiamo gli iperpiani, sottospazi affini di dimensione $n - 1$.

Se $\mathbb{A} = \mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$ allora $S_n = [P, V_n(\mathbb{K})] = \mathscr{A}$, cioè un sottospazio affine n-dimensionale coincide con l'intero spazio.

Proposizione 1.11. *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) dato $S = [P, W]$, per ogni $X \in S$ si ha $S = [X, W]$;

(b) dati $S = [P, W]$ e $S' = [Q, W']$ si ha

(i) $S \subseteq S' \iff S \cap S' \neq \emptyset$ e $W \leq W'$;

(ii) se $S \subseteq S'$ allora $S = S' \iff W = W'$.

Nel caso $S = S_h = [P, W_h]$ e $S' = S_k = [Q, W_k]$, la (ii) si può riformulare come segue: se $S_h \subseteq S_k$ allora $S_h = S_k \iff h = k$ e quindi $S_h \subset S_k \iff h < k$.

Dimostrazione. (a) Sia $X \in S$, allora $\overrightarrow{PX} \in W$. Si ha $Q \in S \iff \overrightarrow{PQ} \in W$. Ma $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XQ}$. Per cui $\overrightarrow{PQ} \in W \iff \overrightarrow{XQ} \in W \iff Q \in [X, W]$. □

2.1 Sottospazi affini nello spazio affine standard $\mathbb{A}(V, V)$

In $\mathbb{A}(V, V)$, fissato un vettore $\boldsymbol{v}$ e un sottospazio W di V, risulta:

$$[\boldsymbol{v}, W] = \tau_W(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \ : \ \boldsymbol{w} \in W\} = \tau_{\boldsymbol{v}}(W).$$

Cioè i sottospazi affini sono i traslati dei sottospazi vettoriali attraverso vettori $\boldsymbol{v} \in V$.

2.2 Parallelismo tra sottospazi

Definizione 1.12. *Due sottospazi affini* $S = [P, W]$ *e* $S' = [Q, W']$ *si dicono* ***paralleli*** *quando* $W \leq W'$ *oppure* $W' \leq W$*, nel qual caso si scrive* $S \parallel S'$ *oppure* $S' \parallel S$.

Osservazione 1.13. *Sottospazi paralleli hanno intersezione vuota oppure l'uno è contenuto nell'altro.*
Infatti, nelle notazioni della Definizione precedente, sia $S \parallel S'$*, con* $W \leq W'$*. Ne segue che se* $S \cap S' \neq \emptyset$ *allora* $S \subseteq S'$ *per la proprietà (b) della Proposizione (1.11).*

Osservazione 1.14. *Sottospazi paralleli della stessa dimensione o sono disgiunti o coincidono.*
Siano cioè $S_h = [P, W_h]$ *e* $S'_h = [Q, W'_h]$ *due sottospazi di dimensione* h*. In tal caso risulta:*

$$S_h \parallel S'_h \Longleftrightarrow W_h = W'_h,$$

dunque se $S_h \cap S'_h \neq \emptyset$ *allora* $S_h = S'_h$.
Quindi sottospazi affini della stessa dimensione sono paralleli se e solo se sono generati dallo stesso sottospazio vettoriale.

Dall'Osservazione precedente segue la

Proposizione 1.15 (Generalizzazione del V **Postulato di Euclide).** *Per ogni sottospazio* $S_h = [P, W_h]$ *e per ogni punto* $Q \in \mathscr{A}$ *esiste uno e un solo* S'_h *tale che* $Q \in S'_h$ *e* $S'_h \parallel S_h$.

Dimostrazione. Basta porre $S'_h = [Q, W_h]$. □

Indichiamo con $\mathscr{S}_h$ l'insieme di tutti i sottospazi affini di dimensione h. La relazione di parallelismo $\parallel$ in $\mathscr{S}_h$ è riflessiva, simmetrica e transitiva, dunque di equivalenza.
Consideriamo l'insieme quoziente $\mathscr{S}_h/_\parallel$. Questo si può identificare con l'insieme dei sottospazi vettoriali h-dimensionali di $V(\mathbb{K})$.

- Per $h = 1$ si ottiene l'insieme $\mathscr{S}_1$ di tutte le rette di $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V)$. Il quoziente $\mathscr{S}_1/_\parallel$ è l'insieme delle classi di parallelismo delle rette, cioè l'insieme delle **direzioni** di $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V)$, ciascuna delle quali si può identificare con un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ di dimensione 1.

- Per $h = 2$ si ottiene l'insieme $\mathscr{S}_2$ di tutti i piani di $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V)$. Il quoziente $\mathscr{S}_2/_{\|}$ è l'insieme delle classi di parallelismo dei piani, cioè l'insieme delle **giaciture** di $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V)$, ciascuna identificabile con un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ di dimensione 2.

Proposizione 1.16. *Sia $S = [P, W]$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}(\mathscr{A}, V)$ e sia $\tau_{\boldsymbol{v}}$ una traslazione. Allora $\tau_{\boldsymbol{v}}(S)$ è un sottospazio affine parallelo ad S e, se $S = S_h$, allora anche $\tau_{\boldsymbol{v}}(S)$ ha dimensione h.*

Dimostrazione.

$$\tau_{\boldsymbol{v}}(S) = \tau_{\boldsymbol{v}}(\{\tau_w(P) \ : \ w \in W\}) = \{\tau_{\boldsymbol{v}} \circ \tau_{\boldsymbol{w}}(P) \ : \ w \in W\} \overset{1.8(c)}{=}$$

$$= \{\tau_{\boldsymbol{w}} \circ \tau_{\boldsymbol{v}}(P) \ : \ w \in W\} = \{\tau_{\boldsymbol{w}}(\tau_{\boldsymbol{v}}(P)) \ : \ w \in W\} = [\tau_{\boldsymbol{v}}(P), W].$$

□

In conclusione si ha

$$\tau_{\boldsymbol{v}}([P, W]) = [\tau_{\boldsymbol{v}}(P), W].$$

2.3 Azione delle traslazioni sui sottospazi nello spazio affine standard $\mathbb{A}(V, V)$

La Proposizione precedente afferma che le traslazioni, in ogni spazio affine, mutano sottospazi affini in sottospazi affini paralleli e della stessa dimensione (se questa è finita). In particolare, in $\mathbb{A}(V, V)$ possiamo dire che le traslazioni mutano sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$ in sottospazi affini.

2.4 Proprietà delle rette di $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, $n > 1$

Definizione 1.17. *In $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$ **due rette** si dicono **incidenti** se hanno esattamente un punto in comune.*

Definizione 1.18. *In $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$ con $n > 2$, **due rette** si dicono **sghembe** se non esiste alcun piano che le contiene entrambe.*

Proposizione 1.19. *In $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, valgono le seguenti proprietà:*

(a) *per due punti distinti P, Q passa una e una sola retta;*

(b) *due rette parallele sono sempre complanari (esiste cioè un piano che le contiene entrambe);*

(c) *per un punto P passa una e una sola retta parallela a una retta data;*

(d) *due rette incidenti sono complanari;*

(e) *per $n = 2$, cioè in un piano affine, date due rette r ed s si hanno le seguenti possibilità:*

- *$r \cap s = \emptyset$, quindi $r \parallel s$;*
- *$r \cap s = r = s$, quindi $r \parallel s$;*
- *$r \cap s = \{P\}$, un punto, quindi r ed s sono incidenti;*

(f) *se $n > 2$ esistono rette sghembe;*

(g) *rette sghembe giacciono su piani paralleli;*

(h) *se $n > 2$ per una retta passano almeno due piani distinti.*

Dimostrazione.

(a) Siano $P, Q \in \mathscr{A}$ con $P \neq Q$. Allora $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ} \neq \mathbf{0}$. Sia $W_1 = <\boldsymbol{v}>$. La retta $[P, W_1]$ contiene sia l'origine P sia $Q = \tau_{\boldsymbol{v}}(P)$.
Dimostriamo l'unicità. Supponiamo che $[P, W_1']$ sia un'altra retta contenente P e Q. Allora $\overrightarrow{PQ} \in W_1'$, quindi $W_1 = W_1'$, per cui $[P, W_1] = [P, W_1']$.

(e) Per la proprietà (a), se $|r \cap s| \geq 2$, allora $r = s$. Quindi le possibilità per $r \cap s$ sono quelle elencate. Resta da dimostrare che se $r \cap s = \emptyset$ allora $r \parallel s$. Supponiamo che $r \not\parallel s$ e proviamo che r ed s hanno necessariamente un punto in comune.
Siano $r = [P, <\boldsymbol{v}>]$ ed $s = [Q, <\boldsymbol{w}>]$, con $\boldsymbol{w} \notin <\boldsymbol{v}>$.
Allora $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> = W_2 = V_2(\mathbb{K})$ (perché siamo in un piano affine). Anche

il vettore $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{PQ}$ sta in $V_2(\mathbb{K})$, per cui esistono α e β appartenenti a $\mathbb{K}$ tali che $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}$ e dunque

$$\exists X \in r,\ Y \in s\ : \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{QY}$$

con $\overrightarrow{PX} = \alpha\boldsymbol{v}$ e $\overrightarrow{QY} = \beta\boldsymbol{w}$. Cioè

$$\exists X \in r \text{ t.c. } \exists Y \in s\ : \overrightarrow{QX} = -\overrightarrow{XQ} = -(\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PX} - (\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{QY}) =$$

$$= -\overrightarrow{QY} \in <\boldsymbol{w}> \Longrightarrow \exists X \in r \cap s.$$

(f) Sia $P \in \mathscr{A}$. Poiché la dimensione $n \geq 3$, esistono 3 vettori linearmente indipendenti, siano essi $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_n(\mathbb{K})$. Sia $Q = \tau_{\boldsymbol{u}}(P)$ e siano $r = [P,\ <\boldsymbol{v}>\ ]$ ed $s = [Q,\ <\boldsymbol{w}>\ ]$. Verifichiamo che r ed s sono sghembe.
Supponiamo per assurdo che esista un piano α tale che $r, s \subseteq \alpha$ con $\alpha = [P, W_2]$.
Poiché $Q \in \alpha$, si ha $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{PQ} \in W_2$.
Si ha

$$r \subseteq \alpha \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v} \in W_2 \quad \text{e} \quad s \subseteq \alpha \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{w} \in W_2.$$

Quindi $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W_2$, il che è assurdo.

(g) Nelle notazioni del punto (f) si ha

$$r \subseteq [P,\ <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>\ ] \parallel [Q,\ <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>\ ] \supseteq s.$$

□

2.5 Rette e piani in $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, $n > 2$

Definizione 1.20. *In $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, per $n > 2$,* ***una retta ed un piano*** *si dicono* ***incidenti*** *se hanno un punto in comune.*

La successiva Proposizione assicura che allora tale punto è unico:

Proposizione 1.21. *In $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, valgono le seguenti proprietà:*

(a) *se una retta non è contenuta in un piano, allora ha al più un punto in comune con esso, equivalentemente*

(a') *se una retta ha due punti in comune con un piano, essa giace interamente nel piano;*

(b) *se $n = 3$, dati una retta r e un piano α, si hanno le seguenti possibilità:*

- $\alpha \cap r = \emptyset$, *quindi* $\alpha \parallel r$;
- $\alpha \cap r = r \subseteq \alpha$, *quindi* $\alpha \parallel r$;
- $\alpha \cap r = \{P\}$, *un punto, quindi* α *e* r *sono incidenti;*

Dimostrazione.

(a) Siano r una retta e α un piano tali che $r \not\subseteq \alpha$. Sia $P \in r \cap \alpha$; allora $r = [P, < \boldsymbol{v} >]$ ed $\alpha = [P, W_2]$. Se esistesse un ulteriore punto $Q \in r \cap \alpha$, avremmo $\overrightarrow{PQ} \in < \boldsymbol{v} >$, da cui $< \boldsymbol{v} > = < \overrightarrow{PQ} >$ e $\overrightarrow{PQ} \in W_2$.
Quindi $< \boldsymbol{v} > = < \overrightarrow{PQ} > \subseteq W_2$, da cui seguirebbe per (b) di (1.11), che $r \subseteq \alpha$, contro l'ipotesi.

(b) La dimostrazione è lasciata per esercizio.

□

2.6 Proprietà dei piani di $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, $n > 2$

Definizione 1.22. *In $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$* ***due piani*** *si dicono* ***incidenti*** *se hanno almeno un punto in comune.*

In generale, due piani incidenti possono avere esattamente un punto in comune, oppure un'intera retta, per la Proposizione (1.21).

Proposizione 1.23. *In $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, valgono le seguenti proprietà:*

(a) *per tre punti non allineati passa uno e un solo piano;*

(b) *per una retta e un punto esterno ad essa passa uno e un solo piano;*

(c) *per un punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato;*

(d) *per $n = 3$, cioè nello spazio affine tridimensionale, due piani distinti aventi un punto in comune hanno una retta in comune (passante per quel punto);*

(e) *per $n = 3$, cioè nello spazio affine tridimensionale, dati due piani α e β si hanno le seguenti possibilità:*

- $\alpha \cap \beta = \emptyset$, *quindi* $\alpha \parallel \beta$;
- $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$, *quindi* $\alpha \parallel \beta$;
- $\alpha \cap \beta = \{r\}$, *una retta, quindi* α *e* β *sono incidenti;*

Dimostrazione.

(a) Siano P, Q, R tre punti non allineati. Allora i vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ sono linearmente indipendenti. Sia dunque $W_2 = < \overrightarrow{PQ}, \ \overrightarrow{PR} >$. Allora $\alpha = [P, W_2]$ è un piano che contiene P, Q, R.

(d) Siano α e β due piani distinti di $\mathbb{A}_3(\mathscr{A}, V)$ e sia $P \in \alpha \cap \beta$. Allora P può essere scelto come origine sia di α sia di β, cioè $\alpha = [P, W_2]$ e $\beta = [P, W_2']$ per opportuni W_2, W_2' distinti.
Poiché la dimensione n è 3 e $W_2 \neq W_2'$, si ha, per la formula di Grassmann,

$$\dim(W_2 + W_2') = 3 \Longrightarrow \dim(W_2 \cap W_2') = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Sia $W_1 = W_2 \cap W_2'$ e sia $r = [P, W_1]$. Dalla (b) di (1.11) segue che:
poiché $W_1 \leq W_2$ e $r \cap \alpha \neq \emptyset$ allora $r \subseteq \alpha$ e
poiché $W_1 \leq W_2'$ e $r \cap \beta \neq \emptyset$ allora $r \subseteq \beta$.
Quindi $r \subseteq \alpha \cap \beta$. D'altra parte deve essere anche $\alpha \cap \beta \subseteq r$ perchè se ci fosse un punto fuori di r in $\alpha \cap \beta$, per il punto (b) ci sarebbe tutto un piano e dunque risulterebbe $\alpha = \beta$. Dunque $r = \alpha \cap \beta$

□

Capitolo 2

Geometria Analitica

1 Riferimenti affini e traslazioni

Definizione 2.1. *In uno spazio affine $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, si dice* ***riferimento affine*** *una coppia $[O, \mathscr{B}]$, dove:*

- *O è un punto fissato di $\mathscr{A}$, detto* ***origine del riferimento****;*
- *$\mathscr{B}$ è una base di $V_n(\mathbb{K})$.*

Fissiamo una base ordinata $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ di $V_n(\mathbb{K})$.
Abbiamo visto che l'applicazione

$$\varphi_O : \begin{cases} \mathscr{A} & \longrightarrow & V_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \overrightarrow{OP} \end{cases}$$

è una bijezione e che

$$\varphi_{\mathscr{B}} : \begin{cases} V_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Sia

$$\varphi_{[O,\mathscr{B}]} := \varphi_{\mathscr{B}} \circ \varphi_O : \begin{cases} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{cases},$$

dove $(x_1, \dots, x_n)$ sono le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$ di $V_n(\mathbb{K})$ ripetto alla base $\mathscr{B}$.
Allora $\varphi_{[O,\mathscr{B}]}$ è una bijezione e viene detta **funzione di coordinatizzazione** dello spazio affine $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, rispetto al riferimento affine $[O, \mathscr{B}]$.
Nel seguito identificheremo il punto P con $\varphi_{[O,\mathscr{B}]}(P)$, e $(x_1, \dots, x_n)$ verranno dette le **coordinate affini** di P rispetto al riferimento affine fissato.

Teorema 2.2. *Fissato un riferimento affine in $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, se il punto P ha coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ e il punto Q ha coordinate $(y_1, \ldots, y_n)$, allora il vettore $\overrightarrow{PQ}$ è dato da*

$$\overrightarrow{PQ} = (y_1 - x_1)\ \boldsymbol{e}_1 + \cdots + (y_n - x_n)\ \boldsymbol{e}_n,$$

cioè $\overrightarrow{PQ}$ ha componenti $y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n$ ripetto alla base $\mathscr{B}$ del riferimento affine.

Dimostrazione. Sia O l'origine del riferimento affine. Per (SA2)

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}, \quad \text{cioè} \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\ .$$

Poiché

$$\overrightarrow{OQ} = \ y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n \ \text{ e } \ \overrightarrow{OP} = \ x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n,$$

si ha

$$\overrightarrow{PQ} = (y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n) - (x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = (y_1 - x_1)\ \boldsymbol{e}_1 + \cdots + (y_n - x_n)\ \boldsymbol{e}_n.$$

□

1.1 Equazioni di una traslazione

Sia $\boldsymbol{v} \in V_n(\mathbb{K})$ un vettore fissato e sia $\tau_{\boldsymbol{v}}$ la traslazione di $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$ ad esso associata.
Fissiamo un riferimento affine $[O, \mathscr{B}]$, con $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.
Supponiamo che $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$, con $\boldsymbol{a} := (a_1, a_2, ...a_n) = \varphi(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{K}^n$
Se un punto $P \in \mathscr{A}$ ha coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ e $Q := \tau_{\boldsymbol{v}}(P)$ ha coordinate $(x'_1, \ldots, x'_n)$, vogliamo determinare il legame tra queste due n-uple di coordinate:

$$Q = \tau_{\boldsymbol{a}}(P) \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{a}.$$

Per il Teorema precedente, si ha

$$\overrightarrow{PQ} = (x'_1 - x_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (x'_n - x_n)\boldsymbol{e}_n = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{a},$$

da cui

$$\begin{cases} x'_1 - x_1 = a_1 \\ \dots \\ x'_n - x_n = a_n \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + a_1 \\ \dots \\ x'_n = x_n + a_n \end{cases}.$$

Per cui

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \tag{2.1.1}$$

è l'equazione della traslazione $\tau_{\boldsymbol{v}}$ di vettore $\boldsymbol{v}$ tale che $\boldsymbol{a} = \varphi_B(\boldsymbol{v})$.

1.2 Cambiamenti di riferimento

Fissiamo, in $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$, due diversi riferimenti affini $[O, \mathscr{B}]$ e $[O', \mathscr{B}']$. Sia P un punto generico di $\mathscr{A}$ e siano

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{le sue coordinate rispetto a } [O, \mathscr{B}],$$

$$\boldsymbol{x}' = (x'_1, \dots, x'_n) \quad \text{le sue coordinate rispetto a } [O', \mathscr{B}'].$$

Vogliamo determinare il legame tra $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}'$.
Indichiamo con M la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ e sia

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} t_i \boldsymbol{e}_i.$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}.$$

La relazione vettoriale

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP}$$

si esprime, in coordinate rispetto alla base $\mathscr{B}$ come segue

$$\varphi_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OO'}) + \varphi_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{O'P}) = \varphi_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OP}),$$

in cui

$$\varphi_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OO'}) = \boldsymbol{t}, \qquad \varphi_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{O'P}) = M\boldsymbol{x}', \qquad \varphi_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OP}) = \boldsymbol{x}.$$

Per cui la relazione che esprime le vecchie coordinate rispetto alle nuove è

$$\boldsymbol{x} = M\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{t}.$$

Ricavando $\boldsymbol{x}'$ abbiamo la relazione che esprime le nuove coordinate rispetto alle vecchie:

$$\boldsymbol{x}' = M^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}).$$

Casi particolari.

- $O = O'$, $\mathscr{B} \neq \mathscr{B}'$. Allora la formula diventa $\boldsymbol{x}' = M^{-1}\boldsymbol{x}$, cioè la formula del cambiamento di base.
- $O \neq O'$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$. Allora la formula diventa $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}$, che rappresenta la traslazione di vettore $\overrightarrow{O'O} = -\overrightarrow{OO'}$.
- $O = O'$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$. Allora si ha l'identità $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$.

2 Rappresentazione di sottospazi

Sia fissato un riferimento affine $[O, \mathscr{B}]$ in $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$. Sia $[P_0, W_h] =: S_h$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$. Allora

$$S_h = \{\tau_{\boldsymbol{w}}(P_0) \ : \ \boldsymbol{w} \in W_h\}.$$

Siano

$$\forall \boldsymbol{w} \in W_h, \quad P = \tau_{\boldsymbol{w}}(P_0),$$

$$\varphi_{[O,\mathscr{B}]}(P) = \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \varphi_{[O,\mathscr{B}]}(P_0) = \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Inoltre $\varphi_{[O,\mathscr{B}]}(\mathscr{A}) = \mathbb{K}^n$.

Ricordando l'equazione (2.1.1), otteniamo l'equazione vettoriale di S_h

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{a},$$

al variare di $\boldsymbol{a}$ nel sottospazio h-dimensionale $\varphi_B(W_h)$ di $\mathbb{K}^n$.

Forma parametrica. Si consideri una base $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_h$ di W_h, con

$$\varphi_B(\boldsymbol{w}_j) = \boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad \text{per } j = 1, \dots, h.$$

Allora si ottengono le equazioni parametriche del sottospazio $S_h = [P_0, W_h]$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_h \boldsymbol{a}_h, \quad \text{al variare di } \lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{K}.$$

In forma matriciale

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{\lambda}, \quad \text{con } A = [a_{ij}], \quad \lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_h]^T,$$

cioè in forma scalare:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_h a_{1h} \\ \cdots \\ x_n = x_n^0 + \lambda_1 a_{n1} + \cdots + \lambda_h a_{nh} \end{cases}.$$

Forma cartesiana. Consideriamo l'insieme costituito da tutti e soli i punti di $\mathscr{A}$ le cui coordinate affini siano soluzione di un sistema lineare compatibile

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad \text{cioè } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Ricordiamo che le soluzioni sono della forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z},$$

dove $\boldsymbol{x}_0$ è una soluzione particolare del sistema e $\boldsymbol{z}$ è soluzione del sistema omogeneo associato.

Allora i punti rappresentati sono i traslati di un punto fissato P_0, di coordinate $\boldsymbol{x}_0$ attraverso i vettori le cui componenti $\boldsymbol{z}$ appartengono a $\mathrm{Ker} L_A$, con

$$L_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x} \end{cases}$$

Il nucleo di L_A è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - \mathrm{rg}A =: h$.
Quindi stiamo rappresentando un sottospazio affine $S_h = [P_0, W_h]$, con $W_h = \varphi_{\mathscr{B}}^{-1}(\mathrm{Ker} L_A)$, di dimensione $h = n - \mathrm{rg}A$.

Dalla forma parametrica alla forma cartesiana. Possiamo dedurre come si effettua in generale il passaggio dalla forma parametrica alla forma cartesiana della rappresentazione di un sottospazio S_h di $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$.
Consideriamo la forma parametrica

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_h \boldsymbol{a}_h.$$

Si ricavano i parametri dalle prime h equazioni, risolvendole rispetto a $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ in funzione di $x_1, \ldots, x_h$, di $x_1^0, \ldots, x_h^0$ e di a_{ij} per $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, h$.
Si sostituiscono nelle rimanenti $n - h$ equazioni, che formeranno così un sistema di equazioni cartesiane

$$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

con $C \in \mathrm{Mat}_{r,n}(\mathbb{K})$ e $\mathrm{rg}C = r = n - h$. Questo procedimento viene detto *eliminazione dei parametri.*

Dalla forma cartesiana alla forma parametrica. Consideriamo la forma cartesiana

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Si risolve il sistema, ottenendo la soluzione generale

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z},$$

con x_0 vettore delle coordinate di un punto di S_h e $\boldsymbol{z}$ vettore soluzione del sistema omogeneo associato.

Si esprime $\boldsymbol{z}$ in funzione di h parametri, con $h = n - \text{rg}A$, essendo $\boldsymbol{z} \in \text{Ker}L_A$ e $\dim(\text{Ker}L_A) = n - \text{rg}A$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda_1 \boldsymbol{z}_1 + \cdots + \lambda_h \boldsymbol{z}_h,$$

ottenendo così le equazioni parametriche di S_h.
Questo procedimento non è altro che la risoluzione di un sistema lineare: il sottospazio affine S_h si può quindi interpretare come il luogo dei punti dello spazio affine le cui coordinate sono le soluzioni di un dato sistema lineare (in generale non omogeneo).

Dalle considerazioni svolte fino ad ora risulta che lo studio della Geometria Analitica in uno spazio affine $\mathbb{A}_n(\mathscr{A}, V)$ in cui sia stato fissato un riferimento affine $[O, \mathscr{B}]$, vista l'identificazione dei punti di $\mathscr{A}$ con i vettori di $\mathbb{K}^n$ attraverso la bijezione $\varphi_{[O,\mathscr{B}]} : \mathscr{A} \to \mathbb{K}^n$ che ad ogni punto associa le sue coordinate, equivale allo stesso studio nello spazio affine numerico $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$, che, a sua volta, ricordiamo, altro non è che lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ (preso come insieme di punti), considerato come spazio affine su se stesso mediante la posizione:

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n \quad \overrightarrow{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}.$$

Per questo motivo, d'ora in poi consideriamo addirittura come ambiente $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$ e quindi i punti saranno esattamente n-uple ordinate di elementi di $\mathbb{K}$, mentre i sottospazi sono rappresentati in forma parametrica, traslando combinazioni lineari di generatori, o in forma cartesiana, come insiemi delle soluzioni di sistemi lineari opportuni.

2.1 Equazione cartesiana di un iperpiano

Possiamo scrivere subito l'equazione cartesiana di un iperpiano.
Sia dato $S_{n-1} = [P_0, W_{n-1}]$ con $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Sia $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n-1}\}$ una base di W_{n-1}, con

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{n1}) \\ \ldots \\ \boldsymbol{w}_{n-1} = (a_{1(n-1)}, \ldots, a_{n(n-1)}) \end{cases}.$$

Un punto $P = (x_1, \dots, x_n)$ appartiene ad S_{n-1} se e solo se $\overrightarrow{P_0P} \in W_{n-1}$, cioè se e solo se i vettori $\overrightarrow{P_0P}, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n-1}$ sono linearmente dipendenti. Ciò equivale a richiedere che la matrice che ha sull' ultima colonna le componenti di $\overrightarrow{P_0P}$ e sulle prime $n-1$ colonne le componenti dei vettori $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n-1}$ sia singolare, cioè

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} & x_1 - x_1^0 \\ a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} & x_2 - x_2^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} & x_n - x_n^0 \end{bmatrix} = 0.$$

Indicati con $A_1, \dots, A_n$ i determinanti di ordine $n-1$ dei minori complementari degli elementi dell'ultima colonna di tale matrice, alternativamente presi con segno $+$ e $-$, sviluppiamo il determinante della matrice rispetto all'ultima colonna con la regola di Laplace. Si ha

$$(x_1 - x_1^0)A_1 + \cdots + (x_n - x_n^0)A_n = 0,$$

cioè un'equazione lineare nelle variabili $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$:

$$A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + c = 0, \quad \text{con } (A_1, \dots, A_n) \in (\mathbb{K}^n)^*. \tag{2.2.1}$$

Abbiamo quindi ottenuto l'equazione cartesiana dell'iperpiano S_{n-1}:

$$P \in S_{n-1} \iff \text{le sue coordinate sono soluzioni di (2.2.1).}$$

Nel piano affine $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ gli iperpiani sono le rette, di equazione

$$ax + by + c = 0, \quad \text{con } (a, b) \in \mathbb{K}^2, (a, b) \neq (0, 0).$$

Nello spazio affine $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ gli iperpiani sono i piani, di equazione

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{con } (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

2.2 Parametri direttori di una retta

In $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$, sia ora data una retta $r = [P, W_1]$.

Definizione 2.3. *Si dicono **parametri direttori** di r le componenti di un qualsiasi vettore non nullo di W_1.*

Supponiamo cioè che $W_1 =<\boldsymbol{w}>$ con $\boldsymbol{w} = (a_1, \ldots, a_n)$. Allora ogni n-upla di parametri direttori di r è del tipo $(ta_1, \ldots, ta_n)$ con $t \in \mathbb{K}^*$.
Osserviamo che i parametri direttori sono tutti fra loro proporzionali. La relazione di proporzionalità è una relazione di equivalenza e dà luogo alla **classe di proporzionalità dei parametri direttori**

$$[(a_1, \ldots, a_n)] = \{(ta_1, \ldots, ta_n) \ : \ t \in \mathbb{K}^*\}.$$

3 Geometria Analitica della retta affine $\mathbb{A}_1(\mathscr{A}, V)$

In $\mathbb{A}_1(\mathscr{A}, V)$ sia fissato un riferimento affine $[O, \mathscr{B}]$ con $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{e}_1\}$.
La retta affine $\mathbb{A}_1(\mathscr{A}, V)$ viene così identificata, per mezzo della bijezione $\varphi_{[O,\mathscr{B}]}$, con la retta affine numerica $\mathbb{A}_1(\mathbb{K})$ e, come abbiamo spiegato a pag. 27, identifichiamo ogni punto $P \in \mathbb{A}_1(\mathscr{A}, V)$ e il corrispondente vettore $\overrightarrow{OP}= x_P \boldsymbol{e}_1$ con il vettore $(x_P) \in \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ scrivendo direttamente $\overrightarrow{OP}= P = (x_P)$ e x_P viene detta **ascissa di** P (rispetto al riferimento affine fissato).
Il punto U tale che

$$\overrightarrow{OU}= (1)$$

ha ascissa unitaria e fissa una orientazione privilegiata (positiva) sulla retta affine.
Risulta pertanto

$$\overrightarrow{OP}= x_P \overrightarrow{OU}, \quad \text{e scriveremo anche } \ x_P = \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OU}}.$$

Possiamo quindi chiamare il numero x_P **rapporto semplice dei punti** P,U,O e lo indichiamo con (PUO). Più in generale, dati tre punti A, B, C sulla retta affine, e indicate con x_A, x_B, x_C le rispettive ascisse, chiamiamo **rapporto semplice dei punti** A,B,C il numero

$$(ABC) := \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B}$$

Definizione 2.4. *Dati due punti P, Q, di ascisse rispettivamente x_P e x_Q, si dice* ***misura algebrica del segmento*** $\overrightarrow{PQ}$ *il numero reale*

$$m_a\left(\overrightarrow{PQ}\right) := x_Q - x_P.$$

In particolare la misura algebrica del segmento $\overrightarrow{OP}$ risulta

$$m_a\left(\overrightarrow{OP}\right) = (PUO).$$

4 Geometria Analitica del piano affine $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$

In $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ sia fissato un riferimento affine $[O, \mathscr{B}]$ con $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.
Il piano affine $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ viene così identificato con il piano affine numerico $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$, e per ogni punto P , se $\overrightarrow{OP}= x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$, allora poniamo $\overrightarrow{OP}= P = (x, y)$; x è l'**ascissa** di P ed y l'**ordinata**.
Consideriamo le due rette fondamentali:
l'**asse delle ascisse** $x\ :\ [\ O, <\boldsymbol{e}_1>]$ di equazione cartesiana $y = 0$
e **l'asse delle ordinate** $y\ :\ [\ O, <\boldsymbol{e}_2>]$ di equazione cartesiana $x = 0$.
Siano U_1 e U_2 rispettivamente i punti tali che

$$\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OU_1} = \ U_1 = (1, 0),$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OU_2} = \ U_2 = (0, 1).$$

Definizione 2.5. *Dati due punti $P, Q \in \mathbb{A}_2(\mathbb{K})$, si dice* ***punto medio*** *di P e Q il traslato di P mediante il vettore $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{PQ}$.*

Siano $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$.
Determiniamo le componenti di $\boldsymbol{v}$ e la relativa traslazione $\tau_{\boldsymbol{v}}$:

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{PQ}= \frac{1}{2}\left((x_Q - x_P), (y_Q - y_P)\right)$$

$$\tau_{\boldsymbol{v}}\ :\ \begin{cases} x' = x + \frac{x_Q - x_P}{2} \\ y' = y + \frac{y_Q - y_P}{2} \end{cases}.$$

Il punto medio M di P e Q ha dunque coordinate:

$$M = \left(\frac{x_Q + x_P}{2}, \frac{y_Q + y_P}{2} \right).$$

Generalizzazione. In $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$ le coordinate del punto medio tra due punti saranno sempre date dalla semisomma delle loro coordinate.

4.1 Rappresentazione analitica delle rette in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$

Sia data la retta $r = [P_0, W_1]$, dove $P_0 = (x_0, y_0)$ e $W_1 =< \boldsymbol{w} >$, con $\boldsymbol{w} = (a, b)$, diverso dal vettore nullo.
Allora $W_1 = \{t\boldsymbol{w} : t \in \mathbb{K}\} = \{t(a, b) : t \in \mathbb{K}\}$. Le componenti del generico vettore $\boldsymbol{v}$ di W_1 sono (ta, tb).
Un punto P appartiene alla retta r se e solo se $\overrightarrow{P_0P} \in W_1$, se e solo se le coordinate (x, y) di P si ottengono traslando le coordinate (x_0, y_0) di P_0 mediante un vettore $(ta, tb) \in W_1$, cioè :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases} \quad t \in \mathbb{K},\ (a, b) \neq (0, 0)$$

Queste sono le **equazioni parametriche della retta** r e forniscono le coordinate di tutti e soli i punti di r, al variare di $t \in \mathbb{K}$.
Viceversa il sistema

$$\begin{cases} x = \overline{x} + lt \\ y = \overline{y} + mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{K},\ (l, m) \neq (0, 0)$$

rappresenta, al variare del parametro t, le coordinate di tutti e soli i punti della retta r, passante per $P = (\overline{x}, \overline{y})$ e avente direzione $W_1 =< (l, m) >$.
D'altra parte, in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ le rette sono iperpiani, quindi ogni retta è anche rappresentata da un'**equazione cartesiana** del tipo:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con} \ \ a, b, c \in \mathbb{K},\ (a, b) \neq (0, 0)$$

Retta per due punti.

Siano dati due punti distinti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$. Vogliamo determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta r per P_1 e P_0. Sia cioè $r = \mathrm{rt}(P_0, P_1) = [P_0, V_1]$ con $V_1 = <\overrightarrow{P_0P_1}>$.

Equazioni parametriche. Le componenti di $\overrightarrow{P_0P_1}$ sono $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, per cui

$$\mathrm{rt}(P_0, P_1) = \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}.$$

Equazione cartesiana. Il generico punto P appartiene alla retta r se e solo se i vettori $\overrightarrow{P_0P}$ e $\overrightarrow{P_0P_1}$ sono linearmente dipendenti, quindi se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{bmatrix} = 0,$$

da cui

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0$$

$$(y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y - (y_1 - y_0)x_0 + (x_1 - x_0)y_0 = 0, \quad \text{cioè}$$

$$ax + by + c = 0$$

con $a = y_1 - y_0$, $b = -x_1 + x_0$, $c = -(y_1 - y_0)x_0 + (x_1 - x_0)y_0$. Osserviamo che, nel caso $y_1 - y_0 \neq 0$ e $x_1 - x_0 \neq 0$, l'equazione di può anche scrivere nella forma

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Vediamo ora come si effettua il passaggio dall'equazione cartesiana a quelle parametriche e, viceversa, dalle parametriche alla cartesiana, di una retta assegnata.

Dalle equazioni parametriche. Dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

si elimina il parametro t: da una delle due equazioni, per esempio dalla prima se $l \neq 0$, si ricava t in funzione di una incognita. Si sostituisce poi l'espressione di t nell'altra equazione, ottenendo un'equazione cartesiana per la retta:

$$t = \frac{x - x_0}{l} \qquad y = y_0 + m\frac{x - x_0}{l},$$

$$l(y - y_0) - m(x - x_0) = 0.$$

Esempio 2.6. *Siano* $P = (1, 2)$, $Q = (1, 5)$. *Le equazioni parametriche della retta* $\mathrm{rt}(P, Q)$ *sono*

$$\begin{cases} x = 1 + t(1-1) \\ y = 2 + t(5-2) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

In questo caso l'equazione $x = 1$, *non dipendendo dal parametro* t, *fornisce già un'equazione cartesiana per la retta* $\mathrm{rt}(P, Q)$.

Dall'equazione cartesiana. Consideriamo l'equazione

$$ax + by + c = 0.$$

Si risolve il sistema di una equazione ottenendo la soluzione generale

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}$$

con $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$ soluzione particolare e $\boldsymbol{z}$ soluzione del sistema omogeneo associato $ax + by = 0$.

Tale soluzione dipende da un parametro t:

$$\begin{cases} x = -bt \\ y = at \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}$$

quindi

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}.$$

Esempio 2.7. *Scriviamo le equazioni parametriche della retta di equazione cartesiana* $2x + y - 1 = 0$.
Scegliamo la soluzione particolare $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, *per cui*

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}.$$

4.2 Condizione di allineamento di tre punti

Siano $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ tre punti nel piano. Essi sono allineati se e solo se esiste una retta di equazione $ax + by + c = 0$ tale che le coordinate dei tre punti la soddisfino. Cioè P_1, P_2, P_3 sono allineati se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases},$$

ammette autosoluzioni $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Ciò avviene se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Esempio 2.8. *Consideriamo i punti* $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (2, 1)$, $P_3 = (5, 1)$. *Essi non sono allineati infatti*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Supponiamo ora di fissare due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ distinti e di imporre a un generico punto $P = (x, y)$ di verificare la condizione

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Tutti e soli i punti $P = (x, y)$ che con le loro coordinate soddisfano questa condizione hanno la proprietà di essere allineati con P_1 e P_2. Dunque questo è un altro modo per scrivere l'equazione cartesiana della retta passante per due punti P_1 e P_2. Si noti che, dalla condizione $P_1 \neq P_2$ segue che deve essere diverso da 0 almeno uno dei determinanti del secondo ordine della matrice, $y_1 - y_2$ e $x_1 - x_2$, che costituiscono i coefficienti di x ed y rispettivamente, nell'equazione risultante.

Esempio 2.9. *Scrivere l'equazione cartesiana della retta passante per* $(1, 0)$ *e* $(2, 1)$.

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante con Laplace rispetto alla prima riga si ha:

$$-x + y + 1 = 0.$$

4.3 Parametri direttori di una retta in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$

Abbiamo definito (cfr. Def.(2.3)) i parametri direttori di una retta $r = [P, W_1]$ come le componenti di un qualsiasi vettore non nullo di W_1. Vogliamo ora determinare i parametri direttori di una retta a partire dalle sue equazioni.

Dalle equazioni parametriche. Sia r la retta di equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}.$$

Di qui si ricava immediatamente la classe di proporzionalità dei parametri direttori di r, cioè $[(l, m)]$.

Dall'equazione cartesiana. Sia r la retta di equazione

$$r \ : \ ax + by + c = 0.$$

In forma parametrica r è data, come abbiamo visto in (4.1), da

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases} \quad t \in \mathbb{K},$$

quindi la classe di proporzionalità dei parametri direttori di r è $[(-b, a)]$.

Da ciò si deduce in altro modo ciò che sappiamo direttamente dalla definizione, che due rette sono parallele se hanno parametri direttori proporzionali.

Coefficiente angolare. Sia $[(l, m)]$ la classe di proporzionalità di parametri direttori di una retta. Se $l \neq 0$, una coppia di parametri direttori è $(1, \frac{m}{l})$.

Questa coppia è caratterizzata dal valore $\frac{m}{l}$, che si dice **coefficiente angolare** della retta data.

Ci sono rette che non hanno coefficiente angolare: sono quelle con parametri direttori $[(0, m)]$, con $m \neq 0$. Le loro equazioni sono

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{K},$$

da cui si ricava subito l'equazione cartesiana $x = x_0$. Tali rette sono parallele all'asse y (di equazione $x = 0$).

Possiamo allora riassumere:

- esistono rette che non hanno coefficiente angolare, cioè di equazione $x = k$: sono tutte e sole le rette parallele all'asse delle y;

- se due rette ammettono coefficiente angolare, esse sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.

4.4 Intersezione fra rette in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$

Siano r ed r' due rette di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ aventi equazioni cartesiane:

$r\ :\ ax+by+c=0, \quad (a,b)\neq(0,0) \qquad\qquad r'\ :\ a'x+b'y+c'=0, \quad (a',b')\neq(0,0)$

Studiamo $r\cap r'$.
Gli eventuali punti di intersezione avranno per coordinate le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

Le matrici associate sono

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \qquad\qquad [A|\boldsymbol{c}]=\begin{bmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{bmatrix}$$

Abbiamo allora le seguenti possibilità:

- $\det A\neq 0 \iff r\cap r'=\{P\}$, un punto, per il Teorema di Cramer;
- $\det A=0$, allora:
  - $\mathrm{rg}[A|\boldsymbol{c}]=2 \iff r\cap r'=\emptyset$;
  - $\mathrm{rg}[A|\boldsymbol{c}]=1 \iff r\cap r'=r=r'$.

Possiamo così caratterizzare l'incidenza e il parallelismo fra rette nel piano (si veda (e) della Proposizione (1.19)):

- $r\cap r'=\{P\}$, rette incidenti, se e solo se
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\neq 0;$$
- $r\parallel r'$ e $r\neq r'$ se e solo se (a,b) è proporzionale ad (a',b') ma (a,b,c) non è proporzionale ad (a',b',c');
- $r=r'$, rette parallele e coincidenti, se e solo se (a,b,c) è proporzionale ad (a',b',c').

Osservazione 2.10. *Una retta non ha una sola equazione cartesiana ma ne ha infinite (o $|\mathbb{K}|-1$), tutte tra loro proporzionali.*

Esempio 2.11. *Scrivere un'equazione cartesiana della retta r' parallela alla retta $r \ : \ x - 3y + 1 = 0$ e passante per $P = (0, 1)$.*
Si ha: $r' \ : \ 1(x - 0) - 3(y - 1) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x - 3y + 3 = 0.$

Più in generale se $r \ : \ ax + by + c = 0$ e $P = (x_0, y_0)$, la **retta** r' **parallela ad** r **e passante per** P ha equazione

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

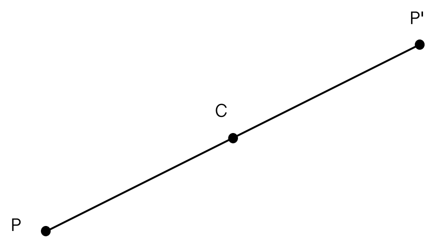
4.5 Simmetrie

Simmetria centrale in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$

Sia C un punto in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$.

Def. La *simmetria centrale* di centro C è la funzione

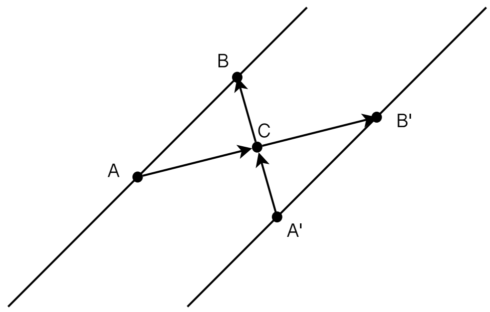
$$\sigma_C \ : \ \begin{cases} \mathbb{A}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}_2(\mathbb{K}) \\ P \longmapsto \sigma_C(P), \text{ tale che } C \text{ sia il punto medio tra } P \text{ e } P'. \end{cases}$$



Si può osservare che il simmetrico del generico punto P è il punto P' tale che $\vec{CP} = -\vec{CP'}$ o, equivalentemente, il punto P' traslato di P tramite il vettore $2\vec{PC}$.

Oss.:

- la simmetria centrale è un'applicazione biunivoca;
- è involutoria, cioè $\sigma_C \neq$id e $\sigma_C^2 =$id, infatti per ogni punto P si ha
$$\sigma_C(\sigma_C(P)) = \sigma_C(\tau_{2\vec{PC}}(P)) = \tau_{2\vec{P'C}}\tau_{2\vec{PC}}(P) = \tau_{-2\vec{PC}}\tau_{2\vec{PC}}(P) = P;$$
- l'unico punto unito è il centro C;
- manda rette in rette, conservandone la direzione. Infatti, se $r = [A, <\overrightarrow{AB}>]$, allora $\overrightarrow{(\sigma_C(A), \sigma_C(B))} = \overrightarrow{(\sigma_C(A), C)} + \overrightarrow{(C, \sigma_C(B))} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$ e $\sigma_C(r) \ = [\sigma_C(A), < \vec{BA} >]$;



- le rette unite sono tutte e sole le rette passanti per C, infatti se $s = [C, < \vec{w} >]$, allora $\sigma_C(s) = [\sigma_C(C), < \vec{w} >] = [C, < \vec{w} >] = s$.

Se $C(x_C; y_C)$ e $P(x_P; y_P)$, ricordando che C è il punto medio tra P e $\sigma_C(P) = P' = (x_{P'}; y_{P'})$, si ha che

$$\begin{cases} x_C = \frac{x_P + x_{P'}}{2} \\ y_C = \frac{y_P + y_{P'}}{2} \end{cases},$$

da cui

$$P' = (2x_C - x_P; 2y_C - y_P).$$

Dunque le equazioni della simmetria centrale di centro C sono:

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_C \\ y' = -y + 2y_C \end{cases}.$$

Generalizzazione. Si può definire la simmetria centrale allo stesso modo in $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$, ottenendo le equazioni:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 + 2x_1^C \\ \dots \\ x'_n = -x_n + 2x_n^C \end{cases}.$$

Per cui

$$\boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}_C \tag{2.4.1}$$

è l'equazione, scritta in forma vettoriale, della simmetria centrale σ_C di centro il punto C di coordinate $\boldsymbol{x}_C$

Simmetria assiale in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$

Siano a una retta e $\vec{v} = (l; m)$ un vettore in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ non proporzionale al vettore direzionale di a.

La *simmetria assiale* di asse a e direzione $\vec{v}$ è la funzione

$$\sigma_a \ : \ \begin{cases} \mathbb{A}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}_2(\mathbb{K}) \\ P \longmapsto \sigma_H(P), \ \text{dove } H = a \cap [P, < \vec{v} >]. \end{cases}$$

Oss.:

- la simmetria assiale è un'applicazione biunivoca;
- è involutoria;
- i punti uniti sono tutti e soli quelli dell'asse di simmetria;
- le rette unite, oltre all'asse di simmetria, sono quelle aventi direzione $\vec{v}$.

Esempio.

Dati il punto $A = (1; 2)$ e la retta r di equazione $r \ : \ x - 2y + 6 = 0$, determinare:

1. i simmetrici A' ed r' di A ed r rispetto alla simmetria di centro $C = (4; 0)$;
2. i simmetrici A'' ed r''di A ed r rispetto alla simmetria assiale di asse $a \ : \ x+2 = 0$ e direzione $\vec{v} = (-1; 2)$.

Svolgimento.

1. Il simmetrico A' di A ha coordinate date da

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_C - x_A \\ y_{A'} = 2y_C - y_A \end{cases},$$

cioè $A' = (8 - 1; 0 - 2) = (7; -2)$.

Il generico punto R appartenente alla retta r ha coordinate $R = (2y_R - 6; y_R)$.

Per cui

$$\begin{cases} x_{R'} = 8 - (2y_R - 6) \\ y_{R'} = 0 - y_R \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} x_{R'} = 14 - 2y_R \\ y_{R'} = -y_R \end{cases}.$$

Eliminando il parametro y_R e ponendo $x = x'_R$, $y = y'_R$ si ha un'equazione cartesiana per $\sigma_C(r)$:

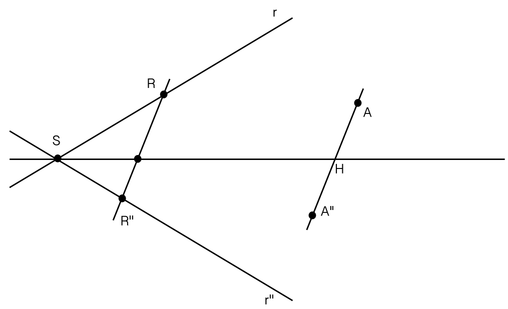
$$x - 2y - 14 = 0.$$

Altrimenti, verificato che $C \notin r$, si può sfruttare il parallelismo tra r e la sua simmetrica r': detto A un punto di r diverso da C, $r' = [\sigma_C(A), <(-2;1)>]$.

2. Per ottenere le coordinate del simmetrico di A si scrivono le equazioni parametriche della retta passante per A e avente direzione $\vec{v}$. L'intersezione di tale retta con l'asse di simmetria dà il punto H tale che $\sigma_H(A) = \sigma_a(A)$:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \quad , t \in \mathbb{K}. \\ x = -2 \end{cases}$$

Si ha $H = (-2;8)$, quindi $A'' = \sigma_H(A) = (-4-1;16-2) = (-5;14)$.



La retta r'' si può ottenere come retta passante per i punti $S = r \cap a$ e $\sigma_a(R)$, dove R è un punto "comodo" di r diverso da S.
Il punto di intersezione tra r e a ha coordinate $S = (-2;2)$. Sia $R = (0;3)$. Il suo simmetrico risulta avere coordinate $R' = (-4;11)$. La retta cercata ha quindi equazioni parametriche

$$r'' \; : \; \begin{cases} x = -2 + (-2+4)t \\ y = 2 + (2-11)t \end{cases} , t \in \mathbb{K}.$$

4.6 Fasci di rette in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$

Nel piano affine $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ siano date due rette distinte r_0 e r_1 di equazioni cartesiane

$$r_0: \; a_0x + b_0y + c_0 = 0$$

$$r_1: \; a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Definizione 2.12. *Si chiama* **fascio di rette di generatrici** r_0 **e** r_1, *e si indica con* $\mathscr{F}_{r_0,r_1}$, *la totalità delle rette del piano una cui equazione cartesiana è ottenuta come combinazione lineare delle equazioni di* r_0 *e* r_1.

Un'equazione cartesiana per il fascio di rette di generatrici r_0 e r_1 è pertanto

$$(2.4.2)\quad \mathscr{F}_{r_0,r_1} : \lambda(a_0x+b_0y+c_0)+\mu(a_1x+b_1y+c_1) = 0, \qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Osserviamo innanzitutto che la definizione è ben posta, infatti per ogni $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ l'equazione (2.4.2) è l'equazione di una retta, oppure non è verificata da alcun punto di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$. Infatti tale equazione può essere riscritta nella forma:

$$(\lambda a_0 + \mu a_1)x + (\lambda b_0 + \mu b_1)y + (\lambda c_0 + \mu c_1) = 0,$$

pertanto è un'equazione lineare in x e y. Inoltre i coefficienti di x e y in tale equazione non sono contemporaneamente nulli purché il sistema lineare nelle inconite λ e μ

$$\begin{cases} \lambda a_0 + \mu a_1 = 0 \\ \lambda b_0 + \mu b_1 = 0 \end{cases}$$

ammetta solo la soluzione banale: questo accade certamente quando è uguale a 2 il rango della matrice dei coefficienti del sistema, ovvero quando le due generatrici sono incidenti, e in questo caso per ogni scelta possibile di (λ, μ) non entrambi nulli, l'equazione (2.4.2) è l'equazione di una retta. Invece, se le due rette generatrici sono parallele allora il sistema precedente ammette ∞^1 autosoluzioni appartenenti ad un certo insieme S, mentre il sistema lineare

$$\begin{cases} \lambda a_0 + \mu a_1 = 0 \\ \lambda b_0 + \mu b_1 = 0 \\ \lambda c_0 + \mu c_1 = 0 \end{cases}$$

non ha autosoluzioni essendo r_0 ed r_1 distinte, quindi per $(\lambda, \mu) \in S$ l'equazione (2.4.2) non è verificata da alcun punto di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$.

Esaminiamo ora la mutua posizione delle rette del fascio $\mathscr{F}$, distinguendo due casi, riassunti nel seguente enunciato.

Proposizione 2.13. *Se le due rette* r_0 *ed* r_1 *sono parallele, allora le rette del fascio* $\mathscr{F}_{r_0,r_1}$ *sono tutte e sole le rette del piano parallele alle rette generatrici. Se le due rette* r_0 *e* r_1 *sono incidenti nel punto* P_0, *allora le rette di* $\mathscr{F}_{r_0,r_1}$ *sono la totalità delle rette del piano che passano per il punto* P_0.

Dimostrazione. Supponiamo che le rette r_0 ed r_1 siano parallele, pertanto $[(-b_0, a_0)] = [(-b_1, a_1)]$, ovvero esiste $\rho \in \mathbb{K}^*$ tale che $a_1 = \rho a_0$ e $b_1 = \rho b_0$. Allora l'equazione della generica retta del fascio è

$$(\lambda + \rho\mu)a_0x + (\lambda + \rho\mu)b_0y + \lambda c_0 + \rho\mu c_1 = 0$$

e la classe dei suoi parametri direttori è $[(-(\lambda + \rho\mu)b_0, (\lambda + \rho\mu)a_0)] = [(-b_0, a_0)]$ essendo $\lambda + \rho\mu \neq 0$, avendo escluso il caso in cui l'equazione non rappresenta alcun punto del piano.

Viceversa se $r : \; ax + by + c = 0$ è una retta del piano parallela a r_0 e r_1 e distinta da entrambe, fissiamo un punto $P = (x_P, y_P)$ su tale retta. Allora, poiché $P \notin r_0, r_1$, sicuramente

$$(a_1x_P + b_1y_P + c_1, -(a_0x_P + b_0y_P + c_0)) \neq (0, 0)$$

e la retta del fascio corrispondente alla scelta

$$(\lambda, \mu) = (a_1x_P + b_1y_P + c_1, -(a_0x_P + b_0y_P + c_0))$$

passa per il punto P ed è parallela a r_0 ed r_1, e pertanto coincide con la retta r.

Siano ora r_0 e r_1 incidenti in $P_0 = (x_0, y_0)$. Allora le coordinate affini di P_0 verificano entrambe le equazioni di r_0 e r_1, pertanto

$$\lambda(a_0x_0 + b_0y_0 + c_0) + \mu(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0,$$

e dunque verificano tutte le equazioni delle rette del fascio $\mathscr{F}_{r_0,r_1}$.

Viceversa se $r : \; ax + by + c = 0$ è una qualsiasi retta passante per P_0 tale retta è univocamente determinata una volta che sia assegnato un ulteriore punto $P = (x_P, y_P)$ distinto da P_0 e appartenente a r. Analogamente a prima sicuramente

$$(a_1x_P + b_1y_P + c_1, -(a_0x_P + b_0y_P + c_0)) \neq (0, 0)$$

e la retta del fascio corrispondente alla scelta

$$(\lambda, \mu) = (a_1x_P + b_1y_P + c_1, -(a_0x_P + b_0y_P + c_0))$$

passa per il punto P, e pertanto coincide con la retta r. $\square$

Una immediata conseguenza del precedente risultato è che se s_0 e s_1 sono due rette distinte qualsiasi del fascio generato dalle rette r_0 e r_1, allora $\mathscr{F}_{r_0,r_1} = \mathscr{F}_{s_0,s_1}$. Inoltre è evidente che fissato un qualsiasi punto del piano distinto dall'eventuale punto comune a r_0 e r_1, esiste esattamente una retta del fascio passante per tale punto.

Dato un fascio $\mathscr{F}$ di equazione

$$\mathscr{F}: \ \lambda(a_0x + b_0y + c_0) + \mu(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

almeno uno tra λ e μ è sicuramente diverso da 0, supponiamo per esempio che sia $\lambda \neq 0$. Allora è possibile dividere l'equazione di $\mathscr{F}$ per λ e, posto $k = \mu/\lambda$, ottenere

$$a_0x + b_0y + c_0 + k(a_1x + b_1y + c_1) = 0, \qquad k \in \mathbb{K},$$

che si chiama **equazione ridotta del fascio** $\mathscr{F}$ rispetto al parametro λ. Tale equazione mette maggiormente in evidenza il fatto che un fascio di rette è un insieme di oggetti che sono sostanzialmente parametrizzati da un solo parametro appartenente a $\mathbb{K}$, ma di fatto non rappresenta la totalità delle rette di $\mathscr{F}$, perché avendo supposto $\lambda \neq 0$ la retta $r_1: \ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ non è rappresentata per nessun valore di $k \in \mathbb{K}$.

Analogamente si può ridurre l'equazione di $\mathscr{F}$ se si suppone sia $\mu \neq 0$.

Alla luce della Proposizione 2.13 è inoltre ragionevole la seguente definizione.

Definizione 2.14. *Chiamiamo* **fascio improprio di rette** *di* sostegno *una retta* r_0 *la totalità delle rette di* $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ *parallele a* r_0 *e lo indicheremo con* $\mathscr{F}_{r_0}$*, mentre chiamiamo* **fascio proprio di rette** *di* centro *(o* sostegno*) un punto* P_0 *la totalità delle rette di* $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ *che passano per il punto* P_0*, e lo indicheremo con* $\mathscr{F}_{P_0}$.

Osserviamo che i fasci propri e impropri di rette sono effettivamente dei fasci di rette, ovvero che è sempre possibile scrivere l'equazione delle rette che li compongono nella forma (2.4.2). Fissata una retta r_0 del piano esiste sicuramente un punto P che non appartiene a tale retta (perché?), e per tale punto la retta r_1 parallela ad r_0 e distinta da quest'ultima, pertanto al fascio improprio $\mathscr{F}_{r_0}$ di sostegno r_0 appartengono sicuramente almeno due rette distinte, quindi $\mathscr{F}_{r_0} = \mathscr{F}_{r_0,r_1}$.

Analogamente fissato il punto P_0 esistono almeno una retta r_0 passante per P_0 e almeno un punto P_1 non appartentente a tale retta (perché?), pertanto, se indichiamo con r_1 la retta individuata dai punti P_0 e P_1, le due rette distinte r_0 ed r_1 appartengono al fascio proprio $\mathscr{F}_{P_0}$ di sostegno P_0, e dunque $\mathscr{F}_{P_0} = \mathscr{F}_{r_0,r_1}$.

Per assegnare un fascio improprio di rette pertanto è sufficiente assegnare una retta r di tale fascio, o addirittura semplicemente la direzione comune a tutte le rette del fascio, mediante una classe di proporzionalità $[(l, m)]$ di parametri direttori. Quindi l'equazione del fascio improprio di rette parallele alla retta $r: \ ax + by + c = 0$ è

$$\mathscr{F}_r : \ ax + by + k = 0, \qquad k \in \mathbb{K}.$$

Analogamente per assegnare un fascio proprio di rette è sufficiente fissare un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ del piano, e allora l'equazione di tale fascio $\mathscr{F}_{P_0}$ è :

$$\mathscr{F}_{P_0} : \ y - y_0 = k(x - x_0), \qquad k \in \mathbb{K}.$$

Quest'ultima equazione è però un'equazione ridotta del fascio, infatti non è rappresentata la retta di equazione $x - x_0 = 0$.

5 Geometria Analitica dello spazio affine $\mathbb{A}_3(\mathscr{A}, V)$

In $\mathbb{A}_3(\mathscr{A}, V)$ sia fissato un riferimento affine $[O, \mathscr{B}]$ con $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.
Lo spazio affine $\mathbb{A}_3(\mathscr{A}, V)$ viene così identificato con lo spazio affine numerico $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$, e per ogni punto P si ha $P = (x, y, z)$ con $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$.
Consideriamo le tre rette fondamentali:

- $x \ : \ [\,O, <\boldsymbol{e}_1>]$: **asse delle ascisse**;
- $y \ : \ [\,O, <\boldsymbol{e}_2>]$: **asse delle ordinate**;
- $z \ : \ [\,O, <\boldsymbol{e}_3>]$: **asse delle quote**.

Le tre rette non sono complanari e a due a due individuano piani distinti:

- il piano coordinato $x, y \ = \ [\,O, <\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2>]$, di equazione cartesiana $z = 0$;

- il piano coordinato $x, z = [\,O, <\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3>]$, di equazione cartesiana $y = 0$;
- il piano coordinato $y, z = [\,O, <\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3>]$, di equazione cartesiana $x = 0$.

5.1 Rappresentazione analitica delle rette in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$

Procediamo in modo analogo al caso piano: sia $r = [P_0, W_1]$ con $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e sia $W_1 =<\boldsymbol{w}>$, con $\boldsymbol{w} = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$.
Allora $W_1 = \{t\boldsymbol{w} \ : \ t \in \mathbb{K}\} = \{t(a, b, c) \ : \ t \in \mathbb{K}\}$.
Un punto P appartiene alla retta r se e solo se il vettore $\overrightarrow{P_0P} \in W_1$, se e solo se le coordinate (x, y, z) di P si ottengono traslando le coordinate (x_0, y_0, z_0) di P_0 mediante un vettore $(ta, tb, tc) \in W_1$, cioè :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}, \ (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Queste sono le equazioni parametriche della retta r. Viceversa un sistema del tipo

$$\begin{cases} x = \overline{x} + lt \\ y = \overline{y} + mt \\ z = \overline{z} + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}, \ (l, m, n) \neq (0, 0, 0)$$

rappresenta, al variare del parametro t, le coordinate di tutti e soli i punti della retta r di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$, di origine $P = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ e sottospazio vettoriale $W_1 =<(l, m, n)>$.

Siano dati due punti distinti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.
Vogliamo determinare le equazioni parametriche della retta r per P_1 e P_0, cioè $r = \mathrm{rt}(P_0, P_1) = [P_0, V_1]$ con $V_1 =<\overrightarrow{P_0P_1}>$.
Le componenti di $\overrightarrow{P_0P_1}$ sono $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, per cui la retta r ha equazioni parametriche

$$\mathrm{rt}(P_0, P_1) \ : \ \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}.$$

Per quanto riguarda le equazioni cartesiana, nel caso dello spazio tridimensionale, la retta sarà rappresentata da un sistema di almeno due equazioni (di rango 2). Per ricavare tali equazioni vedremo più avanti uno o due metodi. Premettiamo lo studio dei piani in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ (iperpiani).

5.2 Rappresentazione analitica dei piani in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$

Sia $\alpha = [P, W_2]$ un piano di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$.

Supponiamo che $W_2 =< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} >$ con $\boldsymbol{v} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\boldsymbol{w} = (b_1, b_2, b_3)$ linearmente indipendenti, cioè con
$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2.$$
Sappiamo allora che il generico vettore di W_2 ha componenti
$$\lambda a_1 + \mu b_1, \qquad \lambda a_2 + \mu b_2, \qquad \lambda a_3 + \mu b_3.$$
Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, allora il generico punto $P = (x, y, z)$ di $[P, W]$ è
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \qquad \operatorname{rg}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2.$$
Queste sono le **equazioni parametriche del piano** α.

Viceversa, equazioni di questo tipo, in cui è espressa dipendenza da due parametri, rappresentano sempre un piano.

D'altra parte, i piani di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ sono iperpiani, per cui sarà possibile determinarne con facilità l'**equazione cartesiana** (univocamente determinata a meno di un fattore di proporzionalità non nullo):
$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$
Dunque il luogo dei punti dello spazio che con le loro coordinate affini annullano l'equazione $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ è l'insieme dei punti di un piano.

Dall'equazione cartesiana a quelle parametriche. Vogliamo ricavare le equazioni parametriche di un piano α, ovvero la sua rappresentazione $[P, W_2]$, a partire dall'equazione cartesiana
$$\alpha \;:\; ax + by + cz + d = 0. \tag{2.5.1}$$
Esplicitiamo le soluzioni di tale equazione mediante la teoria dei sistemi lineari
Le soluzioni sono date da
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}$$

con $\boldsymbol{x}_0$ soluzione particolare e $\boldsymbol{z}$ soluzione del sistema omogeneo associato, di rango 1.

Dunque $\boldsymbol{z}$ varia in un sottospazio di $\mathbb{K}^3$ di dimensione $h = 3 - 1 = 2$ e il generico vettore $\boldsymbol{z} \in \mathbb{K}^3$ descrive un sottospazio vettoriale W_2.

L'equazione vettoriale $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}$ rappresenta quindi in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ un sottospazio $S_2 = [P_0, W_2]$, dove P_0 è il punto di coordinate $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ e W_2 è il sottospazio di giacitura di S_2.

Per ricavare poi le equazioni parametriche di α, si dovrà fissare una base $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ per il sottospazio W_2 delle soluzioni dell'equazione omogenea $ax + by + cz = 0$: siano $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ e $\boldsymbol{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, quindi

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} \\ x_2 = x_2^0 + \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} \\ x_3 = x_3^0 + \lambda_1 a_{31} + \lambda_2 a_{32} \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

sono le equazioni parametriche del piano α.

Esempio 2.15. *In $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ consideriamo il piano α di equazione:*

$$\alpha \ : \ 3x + 2y - z - 5 = 0.$$

Per risolvere l'equazione possiamo ricavare z in funzione di x e y: $z = 3x + 2y - 5$. Dunque la soluzione generale è

$$\left[\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 3x + 2y - 5 \end{array}\right. , \qquad \textit{cioè}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ 3x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\alpha = [P_0, W_2] \ \ \textit{con} \ \ P_0 = (0, 0, -5), \ W_2 = \{(x, y, z) \ : \ z = 3x + 2y\}.$$

Per scrivere poi le equazioni parametriche (sostituiamo lambda al posto di x e μ al posto di y):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

oppure, per componenti,

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -5 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

5.3 Equazioni parametriche e cartesiana del piano per tre punti in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$

Ricordiamo che per tre punti non allineati passa uno e un solo piano (si veda (a) della Proposizione (1.23)).

Siano dati, in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$, tre punti non allineati

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Quindi i vettori

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \\ z_2 - z_0 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Posto allora $W_2 = <\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}>$, e $\alpha := [P_0, W_2]$, otteniamo le equazioni parametriche del piano per i tre punti dati:

$$\alpha \ : \begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

Per l'equazione cartesiana (si veda pagina 27):

$$P \in \alpha \iff \text{ i vettori } \quad \overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \quad \text{sono linearmente dipendenti,}$$

cioè se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{bmatrix} = 0,$$

da cui si ricava l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti dati.

5.4 Condizione di complanarità di 4 punti

Dati 4 punti

$$P = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

essi sono complanari se e solo se esiste un piano α a cui essi appartengono, equivalentemente se esistono $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ non tutti nulli, tali che

$$\begin{cases} a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z} + d = 0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{cases}.$$

Questo sistema, lineare omogeneo nelle incognite a, b, c, d ammette autosoluzioni se e solo se:

$$\det \begin{bmatrix} \overline{x} & \overline{y} & \overline{z} & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

che rappresenta la condizione di complanarità dei 4 punti dati.
Se pensiamo di fissare 3 dei 4 punti P_0, P_1, P_2, supposti non allineati, la condizione sopra scritta, rispetto alle coordinate (x, y, z) di un punto P generico diventa

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

ed esprime l'appartenenza di P al piano individuato da P_0, P_1, P_2, cioè è l'equazione cartesiana del piano per P_0, P_1, P_2. Si noti che dalla condizione che P_0, P_1, P_2 non siano allineati segue che deve essere diverso da zero almeno uno dei determinanti del terzo ordine della matrice ottenuti sopprimendo la prima riga, i quali costituiscono rispettivamente i coefficienti di x, y, z nell'equazione risultante.

5.5 Intersezione fra piani in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$

Siano dati due piani α ed α' in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$, di equazioni ripettivamente:

$$\alpha \ : \ ax + by + cz + d = 0 \qquad \alpha' \ : \ a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Allora l'intersezione tra i due piani è data da

$$\alpha \cap \alpha' \ : \ \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} .$$

Dalla (e) della Proposizione (1.23) abbiamo che si può verificare uno e uno solo dei seguenti casi:

(a) $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$ (i due piani sono paralleli e disgiunti);

(b) $\alpha \cap \alpha' = \alpha = \alpha'$ (i due piani coincidono);

(c) $\alpha \cap \alpha' = r$, una retta (i due piani sono incidenti).

Queste tre situazioni corrispondono esattamente alle possibili soluzioni del sistema $\alpha \cap \alpha'$:

(a) $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$ se e solo se

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 1 \quad \text{e rg}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix} = 2;$$

(b) $\alpha \cap \alpha' = \alpha = \alpha'$ se e solo se

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix} = 1;$$

(c) $\alpha \cap \alpha' = r$ se e solo se

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 2 = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix}.$$

Le condizioni (a) e (b) caratterizzano geometricamente e algebricamente la nozione di parallelismo tra due piani. Ricordiamo che due sottospazi $S_h = [P, W_h]$ e $S'_h = [P', W'_h]$ sono paralleli quando $W_h = W'_{h'}$ il che corrisponde alla condizione che sia 1 il rango della matrice dei coefficienti.

5.6 Parallelismo fra due piani ed equazioni cartesiane di rette

I due piani

$$\alpha \ : \ ax + by + cz + d = 0 \qquad \alpha' \ : \ a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sono paralleli quando vale (a) o (b) e precisamente sono:

(a) paralleli e distinti se e solo se esiste un elemento non nullo $\rho \in \mathbb{K}$ tale che

$$\begin{cases} a' = \rho a \\ b' = \rho b \\ c' = \rho c \\ d' \neq \rho d \end{cases};$$

(b) paralleli e coincidenti se e solo se esiste un elemento non nullo $\rho \in \mathbb{K}$ tale che $(a', b', c', d') = \rho(a, b, c, d)$.

La **giacitura** di un piano (e quindi di tutti i piani ad esso paralleli) è data da:

$$W_2 := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; az_1 + bz_2 + cz_3 = 0\}.$$

La condizione (c) mostra invece come una retta, oltre che con le equazioni parametriche, si possa rappresentare come intersezione di due piani distinti e non paralleli:

$$r \;:\; \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con } \operatorname{rg}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 2.$$

Questo è un sistema di **equazioni cartesiane di un retta** r di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$.

Retta per due punti in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$. Vogliamo scrivere le equazioni cartesiane della retta passante per due punti distinti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.
Sia r la retta $\operatorname{rt}(P_0, P_1)$. Un punto P generico appartiene ad r se e solo se i vettori $\overrightarrow{P_0P}$ e $\overrightarrow{P_0P_1}$ sono linearmente dipendenti, ciò avviene se e solo se

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{bmatrix} = 1$$

se e solo se, nel caso sia $x_1 \neq x_0$:

$$\begin{cases} (x - x_0)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0 \\ (x - x_0)(z_1 - z_0) - (x_1 - x_0)(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

queste sono, appunto, equazioni cartesiane per la retta r, se $x_1 - x_0 \neq 0$.

Casi particolari.

- Se $x_1 = x_0$ e $(y_1 - y_0, z_1 - z_0) \neq (0,0)$, allora r è intersezione dei due piani
$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \end{cases}.$$
- Se $x_1 = x_0$ e $y_1 = y_0 \implies z_1 \neq z_0$, r è intersezione dei piani
$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}.$$

5.7 Parallelismo fra rette in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$

Se consideriamo due rette $r = [P, W_1]$ e $r' = [Q, W_1']$ e siano $W_1 =< (l, m, n) >$ e $W_1' =< (l', m', n') >$. Abbiamo visto che
$$r \parallel r' \iff W_1 = W_1' \iff [(l, m, n)] = [(l', m', n')].$$
Cioè r è parallelela ad r' se e solo se presa una terna di parametri direttori di r ed una terna di parametri direttori di r', esse sono proporzionali.

5.8 Parametri direttori delle rette di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$

I parametri direttori di una retta $r = [P, W_1]$, che sono le componenti di un qualsiasi vettore non nullo di W_1, risultano quindi gli elementi analitici che caratterizzano tutta la classe di rette parallele ad r.
Vogliamo determinare i parametri direttori di una retta r di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ a partire dalle sue equazioni.

Dalle equazioni parametriche. Sia data la retta r di equazione
$$r \ : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}.$$
La terna di parametri direttori di r è $[(l, m, n)]$.
Dalle equazioni cartesiane. Sia data la retta r di equazione
$$r \ : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con rg} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 2.$$

Il problema consiste nel passare delle equazioni cartesiane a quelle parametriche. Occorre dunque risolvere il sistema omogeneo associato, che rappresenta il sottospazio di direzione della retta r:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni, per la Regola dei minori, sono proporzionali a

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Questi tre valori costituiscono allora una terna di parametri direttori per r. Dunque se r è data in forma cartesiana, cioè come intersezione di due piani, una terna di parametri direttori è

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

5.9 Posizioni reciproche di due rette in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$

Siano r ed s due rette di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$. Come abbiamo visto: r e s possono essere sghembe o complanari. Se sono complanari possono essere incidenti o parallele (distinte o coincidenti).

Vogliamo ritrovare analiticamente i vari casi supponendo di conoscere le equazioni cartesiane

$$r \ : \ \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ \overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c}z + \overline{d} = 0 \end{cases} \quad \text{(rango 2)},$$

$$s \ : \ \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ \overline{a}'x + \overline{b}'y + \overline{c}'z + \overline{d}' = 0 \end{cases} \quad \text{(rango 2)}.$$

Esaminiamo il sistema $r \cap s$:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ \overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c}z + \overline{d} = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ \overline{a}'x + \overline{b}'y + \overline{c}'z + \overline{d}' = 0 \end{cases}$$

di 4 equazioni e 3 incognite.

Sia A la matrice dei coefficienti del sistema e sia $[A|\boldsymbol{d}]$ la matrice completa.

(a) Se $\mathrm{rg}[A|\boldsymbol{d}] = 4$ allora il sistema non ha soluzioni, per cui $r \cap s = \emptyset$, quindi abbiamo due possibilità:

(a.1) r ed s sono sghembe oppure

(a.2) r ed s sono parallele.

In realtà questa seconda possibilità non si può verificare. Infatti se le due rette fossero parallele il sistema lineare omogeneo (che rappresenta le intersezioni dei rispettivi sottospazi direzionali)

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c}z = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ \overline{a}'x + \overline{b}'y + \overline{c}'z = 0 \end{cases}$$

avrebbe ∞^1 soluzioni (le due rette hanno la stessa direzione) e quindi la matrice A avrebbe rango 2. Dunque sarebbero nulli tutti i determinanti dei minori del terzo ordine della matrice A. In tal caso, sviluppando il determinante di $[A|\boldsymbol{d}]$ con la regola di Laplace, rispetto all'ultima colonna, si otterrebbe $\det A = 0$, contro l'ipotesi, dunque

(a) $\mathrm{rg}[A|\boldsymbol{d}] = 4$ se e solo se le rette r ed s sono sghembe;

(b) $\det[A|\boldsymbol{d}] = 0$ se e solo se le rette sono complanari. In questo caso, si deduce immediatamente che:

(b.1) $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}[A|\boldsymbol{d}] = 3 \iff r, s$ incidenti;

(b.2) $\mathrm{rg}A = 2,\ \mathrm{rg}[A|\boldsymbol{d}] = 3 \iff r, s$ parallele e distinte;

(b.3) $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}[A|\boldsymbol{d}] = 2 \iff r, s$ parallele e coincidenti.

5.10 Intersezione e parallelismo tra retta e piano

Siano dati una retta $r = [P, V_1]$ e un piano $\alpha = [Q, V_2]$. Come abbiamo visto l'inteserzione $r \cap \alpha$ può essere:

- $r \cap \alpha = \emptyset$ (la retta è parallela al piano);
- $r \cap \alpha = r \subseteq \alpha$ (la retta è parallela al piano);
- $r \cap \alpha = \{P\}$, un punto, per cui retta e piano sono incidenti.

Supponiamo che la retta r abbia parametri direttori $[(l, m, n)]$ e il piano α sia rappresentato dall'equazione $ax + by + cz + d = 0$. Allora si ha

$$V_1 =< (l, m, n) >,$$

$$V_2 = \{(x, y, z) \ : \ ax + by + cz = 0\} \ \text{ e}$$

la retta r è parallela al piano α se e solo se $V_1 \leq V_2$. Dunque la condizione di parallelismo retta-piano è

$$r \parallel \alpha \iff al + bm + cn = 0. \tag{2.5.2}$$

Supponiamo ora che r sia data in forma cartesiana

$$r \ : \ \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}.$$

Poiché

$$l = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad m = -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix},$$

la condizione (2.5.2) diventa

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = 0$$

e si può vedere come matrice del sistema

$$r \cap \alpha \ : \ \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases},$$

dunque se

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = 0 \implies r \parallel \alpha,$$

se

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \neq 0 \implies r \cap \alpha = \{P\}.$$

5.11 Fasci di piani in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$

Analogamente a quanto fatto nel piano affine in 4.6, consideriamo in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ due piani distinti π_0 e π_1 di equazioni cartesiane

$$\pi_0 : \ a_0x + b_0y + c_0z + d_0 = 0$$
$$\pi_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

Definizione 2.16. *Si chiama* **fascio di piani di generatori** π_0 **e** π_1*, e si indica con* $\mathscr{F}_{\pi_0,\pi_1}$*, la totalità dei piani dello spazio una cui equazione cartesiana è ottenuta come combinazione lineare delle equazioni di* π_0 *e* π_1*.*

Un'equazione cartesiana per il fascio di piani di generatori π_0 e π_1 è pertanto

$$\lambda(a_0x+b_0y+c_0z+d_0)+\mu(a_1x+b_1y+c_1z+d_1) = 0, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\setminus\{(0,0)\}. \tag{2.5.3}$$

Per i fasci di piani in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ valgono considerazioni del tutto analoghe a quelle che abbiamo fatto nel caso dei fasci di rette in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ nella sezione 4.6 (e, in generale, la situazione è analoga per i fasci di iperpiani nello spazio affine $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$), in particolare è possibile provare il seguente risultato.

Proposizione 2.17. *Se i due piani* π_0 *e* π_1 *sono paralleli, allora i piani del fascio* $\mathscr{F}_{\pi_0,\pi_1}$ *sono tutti e soli i piani di* $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ *paralleli ai piani generatori. Se i due piani* π_0 *e* π_1 *sono incidenti lungo la retta* r_0*, allora i piani di* $\mathscr{F}_{\pi_0,\pi_1}$ *sono la totalità dei piani che contengono la retta* r_0*.*

Dato un fascio $\mathscr{F}$ di equazione

$$\mathscr{F} : \ \lambda(a_0x + b_0y + c_0z + d_0) + \mu(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$$

almeno uno tra λ e μ è sicuramente diverso da 0, supponiamo per esempio che sia $\lambda \neq 0$. Allora è possibile dividere l'equazione di $\mathscr{F}$ per λ e, posto $k = \mu/\lambda$, ottenere

$$a_0x + b_0y + c_0z + d_0 + k(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0, \qquad k \in \mathbb{K},$$

che si chiama **equazione ridotta del fascio** $\mathscr{F}$ rispetto al parametro λ. Tale equazione, come già accadeva per i fasci di rette, di fatto non rappresenta la totalità dei piani di $\mathscr{F}$, perché avendo supposto $\lambda \neq 0$ il piano $\pi_1 : \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ non è rappresentato per nessun valore di $k \in \mathbb{K}$. Analogamente si può ridurre l'equazione di $\mathscr{F}$ se si suppone sia $\mu \neq 0$.

Definizione 2.18. *Chiamiamo* **fascio improprio di piani** *di* sostegno *un piano π_0 la totalità dei piani di $\mathbb{A}_3$ paralleli a π_0 e lo indicheremo con $\mathscr{F}_{\pi_0}$, mentre chiamiamo* **fascio proprio di piani** *di* sostegno *una retta r_0 la totalità dei piani di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ che passano per la retta r_0, e lo indicheremo con $\mathscr{F}_{r_0}$.*

È immediato ottenere che un'equazione del fascio improprio di piani paralleli al piano $\pi : \ ax + by + cz + d = 0$ è

$$\mathscr{F}_\pi : \ ax + by + cz + k = 0, \qquad k \in \mathbb{K}.$$

Per determinare un'equazione cartesiana del fascio proprio di piani di sostegno una fissata retta r è invece sufficiente scrivere un'equazione cartesiana per r:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

e osservare che le due equazioni che compaiono nel sistema lineare sono proprio le equazioni cartesiane di due piani distinti che si intersecano lungo la retta r, pertanto un'equazione ridotta del fascio di sostegno r è

$$\mathscr{F}_r : \ ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0, \qquad k \in \mathbb{K}.$$

5.12 Stelle di rette e di piani in $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$

Definizione 2.19. *Si chiama* **stella propria di rette** *la totalità delle rette di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ che passano per un fissato punto P_0, detto* centro *o* sostegno *della stella.*

È immediato osservare che, se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, le rette della stella propria di centro P_0 sono tutte e sole le rette che hanno equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad (l, m, n) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0\}, \ t \in \mathbb{K}.$$

Definizione 2.20. *Si chiama* **stella impropria di rette** *la totalità delle rette di $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ che sono parallele ad una fissata retta r, detta* sostegno *della stella.*

Se la retta r ha parametri direttori $[(l, m, n)]$, allora le rette della stella impropria di sostegno r sono tutte e sole le rette che hanno equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x' + lt \\ y = y' + mt \\ z = z' + nt \end{cases} \qquad (x', y', z') \in \mathbb{K}^3,\ t \in \mathbb{K}.$$

Definizione 2.21. *Si chiama* **stella propria di piani** *la totalità dei piani di* $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ *che passano per un fissato punto* P_0*, detto* centro *o* sostegno *della stella.*

Se $\pi_0 : \ a_0x + b_0y + c_0z + d_0 = 0$, $\pi_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ sono tre piani passanti per P_0 e tali che il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

sia massimo, allora si può dimostrare che i piani della stella propria di centro P_0 sono tutti e soli i piani che hanno equazione

$$\lambda(a_0x + b_0y + c_0z + d_0) + \mu(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \nu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

al variare di $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Definizione 2.22. *Si chiama* **stella impropria di piani** *la totalità dei piani di* $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ *paralleli ad una fissata retta* r*, detta* sostegno *della stella.*

Se la retta r ha parametri direttori $[(l, m, n)]$ e $\pi : \ ax + by + cz + d = 0$ è un piano parallelo a r, allora vale $al + bm + cn = 0$. Inoltre (l, m, n) non sono contemporaneamente nulli, quindi supponendo, per esempio, $l \neq 0$ possiamo ricavare $a = -\frac{bm+cn}{l}$, dunque i piani della stella impropria di sostegno r hanno equazione (ridotta)

$$-\frac{bm + cn}{l}x + by + cz + d = 0, \qquad (b, c) \in \mathbb{K}^2.$$

Osservazione 2.23. *Quando abbiamo introdotto le nozioni di fascio di rette e di piani nei paragrafi 4.6 e 5.11 abbiamo osservato che sono insiemi di oggetti parametrizzati da un solo parametro in* $\mathbb{K}$ *(purché siamo disposti in alcuni casi a rinunciare a rappresentare una retta del fascio). Analogamente si potrebbe osservare che le stelle di rette e di piani in* $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$ *sono insiemi di oggetti che dipendono essenzialmente da* due *parametri liberi di variare in* $\mathbb{K}$.

Capitolo 3

Spazi vettoriali metrici

1 Forme bilineari

Definizione 3.1. *Dato lo spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ sul campo $\mathbb{K}$, una funzione $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice* ***forma bilineare su*** V *se per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ e per ogni $k \in \mathbb{K}$:*

(a) $b(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$;

(b) $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$;

(c) $b(k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = kb(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v})$.

Osservazione 3.2. *Data la forma bilineare b su $V(\mathbb{K})$, per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ si ha $b(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = 0_{\mathbb{K}}$. Infatti, per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ si ha*

$$b(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{0} + \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

In generale, per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ si ha $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \neq b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$; ciò giustifica la seguente

Definizione 3.3. *Una forma bilineare b si dice:*

- ***simmetrica*** *se per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$: $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$;*

- ***antisimmetrica*** *se per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$: $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$.*

Una forma bilineare simmetrica viene anche detta ***prodotto scalare.***

Notazione: un prodotto scalare si indica nel modo seguente:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \qquad \text{oppure} \qquad <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> .$$

1.1 Teorema di rappresentazione delle forme bilineari

Sia $V = V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$
e sia $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ una base fissata.
Sia $b \ : \ V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare su V e siano

$$a_{ij} = b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \qquad i, j = 1, \dots, n$$

i valori che la forma assume sulle n^2 coppie di elementi della base $\mathscr{B}$.
Se

$$\boldsymbol{v} := \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{w} := \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e}_j$$

sono due vettori qualsiasi di $V_n(\mathbb{K})$, allora, ricordando la definizione di forma bilineare, otteniamo:

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$$

Viceversa, proveremo fra poco che una funzione $f : \ V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ del tipo

$$f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

con

$$\boldsymbol{v} := \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \quad , \quad \boldsymbol{w} := \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e}_j \qquad \text{e} \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

è una forma bilineare su V con $f(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = a_{ij}$.

Rappresentazione matriciale. In $V_n(\mathbb{K})$, fissata la base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ e la forma bilineare $b \ : \ V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, sia

$$A := [a_{ij}] = [b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)] \ \in \ \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$$

e siano

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} =: \boldsymbol{x} \ \in \ \mathbb{K}^n \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} =: \boldsymbol{y} \ \in \ \mathbb{K}^n$$

le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ rispettivamente rispetto alla base $\mathscr{B}$ (ricordiamo che $\boldsymbol{x} = \varphi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{v})$ e $\boldsymbol{y} = \varphi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{w})$). Allora:

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y} =$$

$$= [x_1 \quad \dots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

La matrice A viene detta **matrice della forma bilineare rispetto alla base $\mathscr{B}$**.

In conclusione, possiamo enunciare il seguente

Teorema 3.4. (di rappresentazione) *Siano $V = V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$, $\mathscr{B}$ una base di V e, per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ i relativi vettori delle coordinate rispetto alla base $\mathscr{B}$. Allora, se b è una forma bilineare su V risulta*

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y}\,,$$

dove A è la matrice di b rispetto alla base $\mathscr{B}$.
Viceversa, per ogni matrice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, ponendo

$$f : \begin{cases} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) & \longmapsto & \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y}\,, \end{cases}$$

si definisce una forma bilineare su V.

Dimostrazione. Come abbiamo già osservato,

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y}\,,$$

da cui la prima parte della tesi.
Viceversa, per dimostrare la bilinearità della funzione f, occorre verificare le proprietà della definizione di forma bilineare. Proviamo, per esempio, che per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ risulta

$$f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\,.$$

Infatti:

$$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^T A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\,.$$

Le rimanenti proprietà di f possono essere facilmente verificate in modo analogo e le lasciamo come esercizio. $\square$

Esempio 3.5. *In $\mathbb{R}^4$ si consideri l'applicazione*

$$b \;:\; \begin{cases} \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \qquad \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \longmapsto \quad x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_3 - x_3y_4 \end{cases}.$$

Si verifichi che b è una forma bilineare e si scriva la matrice di b rispetto alla base canonica.

La funzione b è una forma bilineare per il Teorema di Rappresentazione. La matrice di b rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y} = [x_1 \quad \dots \quad x_4]\ A\ [y_1 \quad \dots \quad y_4]^T = x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_3 - x_3y_4.$$

Se consideriamo un'altra base, la matrice di b cambia: sia $\mathscr{B}'$ la base di $\mathbb{R}^4$

$$\mathscr{B} = (\ \boldsymbol{e}'_1 = (1,0,1,1),\quad \boldsymbol{e}'_2 = (1,0,0,0),\quad \boldsymbol{e}'_3 = (0,1,1,1),\quad \boldsymbol{e}'_4 = (0,0,0,1)\ )$$

Allora:

$$b(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_1) = 0 \neq a_{11}$$

...

Vediamo come si trasforma la matrice di una forma bilineare per un cambiamento di base.

Sia $b\ :\ V \times V \ \longrightarrow\ \mathbb{K}$ una forma bilineare e sia A la matrice di b rispetto a una base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ fissata. Per cui

$$b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y}.$$

Rispetto ad un'altra base $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n)$ sia

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{x}'^T A' \boldsymbol{y}'.$$

Vogliamo esprimere il legame tra A ed A'.
Sia M la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$, cioè $\boldsymbol{x} = M\boldsymbol{x}'$ e $\boldsymbol{y} = M\boldsymbol{y}'$.
Quindi

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y} = (M\boldsymbol{x}')^{\,T} A (M\boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x}'^T M^T A M \boldsymbol{y}',$$

dunque

$$A' = M^T A M,$$

con M matrice $n \times n$ invertibile.

Definizione 3.6. *Due **matrici** $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ si dicono **congruenti** se esiste una matrice invertibile M tale che $B = M^T A M$.*

Questa relazione di congruenza è una relazione di equivalenza in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. *Quindi matrici che rappresentano la stessa forma bilineare rispetto a basi diverse sono congruenti, equivalentemente, una forma bilineare su $V_n(\mathbb{K})$ individua una classe di congruenza di matrici.*

2 Prodotti scalari e forme quadratiche

Definizione 3.7. *Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$.*
Si indica anche con $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Teorema 3.8. *Una forma bilineare $b : V_n \times V_n \longrightarrow \mathbb{K}$ è simmetrica se e solo se la sua matrice A (rispetto ad una base qualsiasi) è simmetrica.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ una base di V_n fissata.
($\Longrightarrow$) Supponiamo che b sia un prodotto scalare. Il generico elemento della matrice A è

$$a_{ij} = b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j).$$

Per ipotesi $b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = b(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$, cioè $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$, per cui $A = A^T$.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che la matrice A della forma bilineare b sia simmetrica. Se $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^n y_i\boldsymbol{e}_i$, si ha

$$b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y} = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}).$$

Dunque b è un prodotto scalare. $\square$

Se $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ è un prodotto scalare su V, possiamo considerare la seguente applicazione:

$$q : \begin{cases} V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \boldsymbol{v} & \longmapsto & q(\boldsymbol{v}) := b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \end{cases}.$$

L'applicazione q viene detta **forma quadratica associata al prodotto scalare** b.

In $V_n(\mathbb{K})$, fissata la base $\mathscr{B}$, per ogni $\boldsymbol{v} \in V$

$$q(\boldsymbol{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{nn}x_n^2,$$

cioè la forma quadratica, applicata alle componenti di un generico vettore, è un *polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili* $x_1, \dots, x_n$. Diremo che tale polinomio *rappresenta la forma quadratica* q *nella base* $\mathscr{B}$.

Proposizione 3.9. *Nelle notazioni precedenti, la forma quadratica associata a* b *gode delle seguenti proprietà:*

(a) per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$*, per ogni* $\boldsymbol{v} \in V$: $q(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda^2 q(\boldsymbol{v})$;

(b) per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$: $2b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = q(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - q(\boldsymbol{v}) - q(\boldsymbol{w})$.

Dimostrazione.

(a) È conseguenza immediata dell'assioma (c) di (3.1).

(b) Siano $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$. Allora

$$q(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - q(\boldsymbol{v}) - q(\boldsymbol{w}) = b(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) =$$

$$= b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 2b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}).$$

□

Se il campo $\mathbb{K}$ ha caratteristica diversa da 2, allora *una forma quadratica q individua univocamente la forma bilineare simmetrica b a cui è associata* perché b si esprime per mezzo di q come $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}(q(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - q(\boldsymbol{v}) - q(\boldsymbol{w}))$. Dunque è equivalente assegnare su $V(\mathbb{K})$, con $\mathrm{char}\mathbb{K} \neq 2$, una forma quadratica q o una forma bilineare simmetrica b, che viene detta **forma bilineare polare della forma quadratica** q.

Definizione 3.10. *Chiamiamo **spazio vettoriale metrico** uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ su cui è assegnata una forma bilineare simmetrica b (o "$\cdot$"). Denoteremo tale spazio con $(V(\mathbb{K}), b)$ oppure con $(V(\mathbb{K}), \cdot)$. Se char$\mathbb{K} \neq 2$ denotiamo lo spazio vettoriale metrico anche con $(V(\mathbb{K}), q)$ e lo chiamiamo **spazio quadratico**.*

2.1 Ortogonalità

Sia $(V(\mathbb{K}), \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico.

Definizione 3.11. *Due vettori $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ sono **ortogonali** se*

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

In tal caso scriveremo $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$.

Osservazione 3.12. *Per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ si ha $\mathbf{0} \perp \boldsymbol{v}$.*

Definizione 3.13. *Sia $A \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto di vettori. Si dice **complemento ortogonale** di A, e si denota con $A^{\perp}$, l'insieme*

$$A^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V \ : \ \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}, \quad \forall \boldsymbol{w} \in A\} = \{\boldsymbol{v} \in V \ : \ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0, \quad \forall \boldsymbol{w} \in A\},$$

cioè $A^{\perp}$ è l'insieme di tutti i vettori dello spazio V ortogonali a tutti i vettori di A.

Osservazione 3.14. *Se $A = \{\mathbf{0}\}$, allora il suo complemento ortogonale è $\mathbf{0}^{\perp} = V$. Se $A = V$, allora $V^{\perp}$ è l'insieme dei vettori ortogonali ad ogni vettore di V. $V^{\perp}$ si chiama anche **radicale di** V e naturalmente contiene $\mathbf{0}$.*

Definizione 3.15. *Diremo che il prodotto scalare "$\cdot$" è **non degenere** o **regolare** quando $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. In caso contrario, lo definiremo **degenere**.*

Definizione 3.16. *Dato un vettore $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ si dice che $\boldsymbol{v}$ è un **vettore isotropo** se $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v}$ o, equivalentemente, se $q(\boldsymbol{v}) = 0$; in caso contrario, diremo che $\boldsymbol{v}$ è **anisotropo**.*
Il vettore $\mathbf{0}$ non è né isotropo né anisotropo.

Definizione 3.17. *Diremo che lo **spazio vettoriale metrico** $(V, \cdot)$ è **isotropo** se contiene un vettore isotropo, altrimenti diremo che è **anisotropo**, ovvero che "$\cdot$" è anisotropo. Lo stesso vale per ogni sottospazio di V.*

Teorema 3.18. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $V(\mathbb{K})$. Allora:*

(a) $A^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$;

(b) $A^{\perp} = < A >^{\perp}$.

Dimostrazione.

(a) Il vettore nullo appartiene ad $A^{\perp}$, per cui $A^{\perp} \neq \emptyset$. Usiamo il Criterio di riconoscimento dei sottospazi: siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in A^{\perp}$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Per ogni $\boldsymbol{w} \in A$: $(\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w} + \beta\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{w} = 0 + 0 = 0$. Quindi $\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 \in A^{\perp}$.

(b) Sia $\boldsymbol{v} \in < A >^{\perp}$, cioè $\boldsymbol{v}$ è ortogonale a tutti i vettori di $< A > \supseteq A$, quindi $\boldsymbol{v}$ è ortogonale a tutti i vettori di A. Dunque $\boldsymbol{v} \in A^{\perp}$.
Viceversa proviamo che $A^{\perp} \subseteq < A >^{\perp}$. Sia $\boldsymbol{v} \in A^{\perp}$. Allora $\forall \boldsymbol{w} \in < A >$, poichè $\boldsymbol{w} = \lambda_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{w}_r$ con $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r \in A$, si ha $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot (\lambda_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{w}_r) = \lambda_1\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_r = 0$.

□

Osservazione 3.19. *Il punto (b) del Teorema precedente viene usato per determinare il complemento ortogonale di un insieme di vettori A fissato:*

si considera il sottospazio $W :=< A >$ e se ne determina una base $\mathscr{B}_W$. Risulta perciò

$$A^\perp =< A >^\perp =< \mathscr{B}_W >^\perp = \mathscr{B}_W^\perp,$$

cioè si calcola il complemento ortogonale dei vettori della base di W.

Esempio 3.20. *In $\mathbb{R}^3$ si consideri il prodotto scalare*

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3.$$

Si determini $A^\perp$, posto

$$A := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poiché

$$< A > = \left\langle \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

allora

$$A^\perp = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{v}_2 \perp \boldsymbol{x}\} =$$

$$= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 + x_3 = 0 \quad e \quad x_1 + x_2 = 0\} =< [1 \quad -1 \quad 1]^T > .$$

Il punto (b) del Teorema precedente ha anche la seguente notevole conseguenza:

Teorema 3.21. *Sia $(V_n(\mathbb{K}), \cdot)$ uno spazio metrico di dimensione finita n e sia $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ una sua base rispetto a cui al prodotto scalare "$\cdot$" sia associata una matrice (simmetrica) $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Se indichiamo con T l'endomorfismo di $V_n(\mathbb{K})$ rappresentato dalla matrice A rispetto alla base $\mathscr{B}$, risulta*

$$V^\perp = \mathrm{Ker}T$$

e dunque

$$\mathrm{dim}V^\perp = n - \mathrm{rg}A.$$

Dimostrazione. Per il punto (b) del Teorema precedente si ha $V^\perp = \mathscr{B}^\perp$ (si veda l'Osservazione 3.19), per cui per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ si ha

$$\boldsymbol{v} \in V^\perp \iff \boldsymbol{v} \in \mathscr{B}^\perp \iff \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{v} = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\iff \boldsymbol{e}_i^T A\boldsymbol{x} = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n,$$

dove $\boldsymbol{x} = \varphi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{v})$.
Dunque $V^\perp = \mathrm{Ker}(\varphi_{\mathscr{B}}^{-1} \circ L_A \circ \varphi_{\mathscr{B}}) = \mathrm{Ker}T$ e risulta $\mathrm{dim}V^\perp = n - \mathrm{rg}A$. □

Poiché il sottospazio $V^\perp$ e la sua dimensione non dipendono dalla base scelta ma solo dalla forma bilineare "$\cdot$", anche il rango r della matrice che rappresenta "$\cdot$" rispetto ad una qualsiasi base è un invariante, detto **rango della forma bilineare** "$\cdot$". Quindi matrici congruenti hanno lo stesso rango (si veda anche [1, Proposizione 5.3 (2), pag. 69]).
Risulta, in particolare, che $V^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$ se e solo se $n = r$, se e solo se $\det A \neq 0$, cioè *il prodotto scalare "$\cdot$" è non degenere se e solo se la matrice che lo rappresenta rispetto ad una base qualsiasi è non singolare.*

Esercizio 3.22. *Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare*

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 - x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1.$$

- *Si dica se tale prodotto scalare è degenere oppure no.*

- *Se A è il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$, determinare $A^\perp$.*

Esercizio 3.23. *Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare*

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 2(x_1y_3 + x_3y_1) - x_3y_3.$$

- *Si determini il radicale $(\mathbb{R}^4)^\perp$.*

- *Se $A = \{[x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ \ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad e \quad x_2 - x_4 = 0\}$, si determinino $A^\perp$, $A \cap A^\perp$, $A + A^\perp$.*

Esercizio 3.24. *Si consideri in* $\mathbb{R}^3$ *il prodotto scalare*

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 3x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2 + 2(x_2y_3 + x_3y_2).$$

- *Si determini la matrice* A *del prodotto scalare rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$*.*
- *Si determini* $(\mathbb{R}^3)^\perp$*.*

Proprietà dei vettori isotropi e anisotropi.

Sia dato uno spazio vettoriale metrico $(V_n(\mathbb{K}), \cdot)$. Vediamo ora come si possano ottenere delle utili *decomposizioni ortogonali* dello spazio $V = V_n(\mathbb{K})$.

Proposizione 3.25. *(a) Se un vettore* $\boldsymbol{v} \in V$ *è isotropo, allora il sottospazio generato da* $\boldsymbol{v}$ *è* ***totalmente isotropo****, cioè consiste di vettori isotropi e del vettore* $\mathbf{0}$*;*

(b) se un vettore $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ *è anisotropo, allora per ogni* $\boldsymbol{w} \in V$ *possiamo scrivere:*

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}}{q(\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v} + \left(\boldsymbol{w} - \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}}{q(\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}\right),$$

in cui $\boldsymbol{w}_1 := \frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}}{q(\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}$ *è proporzionale a* $\boldsymbol{v}$ *e viene detto la* ***proiezione ortogonale di*** $\boldsymbol{w}$ ***sul sottospazio generato da*** $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}_2 := \boldsymbol{w} - \frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}}{q(\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}$ *è ortogonale a* $\boldsymbol{v}$*;*

(c) per ogni vettore anisotropo $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ *si ha*

$$V = <\boldsymbol{v}> \oplus \boldsymbol{v}^\perp.$$

Dimostrazione.

(a) Per ogni $k \in \mathbb{K}$: $k\boldsymbol{v} \cdot k\boldsymbol{v} = k^2 q(\boldsymbol{v}) = k^2 0 = 0.$

(b) Proviamo che $\boldsymbol{w}_2 \perp \boldsymbol{v}$. Infatti

$$\boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{w} - \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}}{q(\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}\right) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

(c) Sia $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ anisotropo. Se $\boldsymbol{w} \in V$, si ha $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_1 \in <\boldsymbol{v}>$ e $\boldsymbol{w}_2 \in \boldsymbol{v}^\perp$, quindi $V = <\boldsymbol{v}> + \boldsymbol{v}^\perp$.
Inoltre, essendo $\boldsymbol{v}$ anisotropo, $<\boldsymbol{v}> \cap \boldsymbol{v}^\perp \lneq <\boldsymbol{v}>$, quindi $<\boldsymbol{v}> \cap \boldsymbol{v}^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$.

□

Definizione 3.26. *Nelle notazioni della Proposizione precedente, chiamiamo* ***coefficiente di Fourier di w rispetto a v*** *lo scalare*

$$\alpha_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) := \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}}{q(\boldsymbol{v})}.$$

Nella dimostrazione della proprietà (c) della proposizione precedente abbiamo utilizzato il fatto che che, per un vettore anisotropo $\boldsymbol{v} \in V$, $<\boldsymbol{v}> \cap \boldsymbol{v}^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$, ed anzi si verifica subito che questa condizione caratterizza i vettori anisotropi.
La proprietà (c) si può in realtà estendere considerando, anzichè un vettore anisotropo, un intero sottospazio U tale che $U \cap\ U^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$: un sottospazio U di uno spazio vettoriale metrico $(V, \cdot)$ che goda di questa proprietà viene detto **sottospazio regolare** (ed infatti in questo caso U risulta regolare come spazio metrico rispetto al prodotto scalare $\cdot$ ad esso ristretto).

Si può pertanto dimostrare il seguente

Teorema 3.27 (della somma diretta ortogonale). *Sia $U \subseteq V_n(\mathbb{K})$ un sottospazio regolare. Allora*

$$V_n(\mathbb{K}) = U \oplus U^\perp.$$

Da cui si ottiene:

(a) $n = \dim U + \dim U^\perp$;

Inoltre, se $(V_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è regolare,

(b) $(U^\perp)^\perp = U$.

3 Basi ortogonali o diagonalizzanti

Definizione 3.28. *Una* ***base*** $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ *dello spazio vettoriale metrico* $(V_n(\mathbb{K}), \cdot)$ *si dice* ***ortogonale*** *o* ***diagonalizzante*** *rispetto al prodotto scalare "$\cdot$" se per ogni* $i, j = 1, \dots, n$ *con* $i \neq j$*, vale:*

$$\boldsymbol{e}_i \perp \boldsymbol{e}_j, \qquad \textit{cioè} \quad \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 0.$$

È evidente che, se $\mathscr{B}$ è una base ortogonale, allora la matrice di "$\cdot$" rispetto a $\mathscr{B}$ assume la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{e}$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i,$$

quindi la relazione di ortogonalità tra vettori si esprime in modo più semplice.

Teorema 3.29 (Esistenza di basi ortogonali). *Ogni spazio vettoriale metrico* $(V_n(\mathbb{K}), \cdot)$ *di dimensione positiva sopra un campo di caratteristica diversa da* 2 *ammette una base ortogonale.*

Ovvero *ogni matrice simmetrica* $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *con char*$\mathbb{K} \neq 2$ *è congruente a una matrice diagonale.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione n di V.

Se $n = 1$ la proprietà è banalmente vera.

Sia vera per n e proviamo che allora è vera per $n + 1$. Se $V^\perp = V$, rispetto a qualunque base la matrice di "$\cdot$" è la matrice nulla, quindi diagonale. Sia allora $V^\perp \neq V$. Allora esiste un vettore $\boldsymbol{e}_0 \in V$ tale che $q(\boldsymbol{e}_0) \neq 0$, cioè $\boldsymbol{e}_0$ è anisotropo. Se infatti la forma q fosse identicamente nulla su tutto V, per la (b) di (3.9) tale risulterebbe anche il prodotto scalare "$\cdot$". Dalla Proposizione precedente segue che

$$V = <\boldsymbol{e}_0> \; \oplus \; \boldsymbol{e}_0^\perp,$$

da cui $\dim \boldsymbol{e}_0^\perp = n$.

Per l'ipotesi induttiva $(\boldsymbol{e}_0^\perp, \cdot)$ ammette una base ortogonale $\mathscr{B}_0 := (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$.

Allora $\mathscr{B} := \mathscr{B}_0 \cup \boldsymbol{e}_0 = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_0)$ è una base di V.
Inoltre per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha $\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_i = 0$, perché $\boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{e}_0^\perp$ e per $i, j = 1, \dots, n$ con $i \neq j$ si ha $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 0$ perché la base $\mathscr{B}_0$ è ortogonale.
In conlusione $\mathscr{B}$ è una base ortogonale per $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$. □

Vediamo ora che, se si considerano, in particolare i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si possono ottenere risultati ancora più precisi: le cosiddette *forme canoniche.*
Notazione: per ogni $r \geq 0$ indichiamo con I_r la matrice identica di ordine r.

Teorema 3.30. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2 (per esempio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e sia $(V_n(\mathbb{K}), \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico. Allora esiste una base diagonalizzante per "$\cdot$" rispetto alla quale la matrice sia della forma*

$$D = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Equivalentemente, *ogni matrice simmetrica di rango r a coefficienti in $\mathbb{K}$ è congruente alla matrice D*

Dimostrazione. Per il Teorema di esistenza di basi ortogonali, esiste in $V_n(\mathbb{C})$ una base $\mathscr{B} := (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ rispetto alla quale, a meno di un riordinamento dei vettori, la matrice di "$\cdot$" assume la forma:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \quad \text{dove} \quad A_r = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{rr} \end{bmatrix},$$

con $r = \mathrm{rg} A$ e $a_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, r$.
Ciò vuol dire che per ogni $i = 1, \dots, r$

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i = a_{ii} \neq 0.$$

Ponendo,

$$\text{per} \quad i = 1, \dots, r, \qquad \boldsymbol{e}'_i := \frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{a_{ii}}},$$

si ottiene che $\mathscr{B}' := (\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ è ancora una base ortogonale per V, rispetto alla quale la matrice del prodotto scalare è ancora diagonale, con coefficienti

$$a'_{ii} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_i = \frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i}{a_{ii}} = 1 \qquad \text{per} \;\; i = 1, \dots, r,$$

$$a'_{ii} = a_{ii} = 0 \qquad \text{per } \; i = r+1, \dots, n.$$

□

Teorema 3.31 (Teorema di Sylvester). *Sia* $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$ *uno spazio vettoriale metrico. Allora esistono un intero non negativo* $p \leq r$*, dove* r *è il rango di "$\cdot$"(dipendente solo da "$\cdot$"), e una base diagonalizzante rispetto a cui la matrice di "$\cdot$" sia della forma*

$$D \;=\; \left[\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{r-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Equivalentemente, *ogni matrice simmetrica reale* A *di rango* r *è congruente a una matrice diagonale del tipo di* D *con* p *dipendente solo da* A.

Dimostrazione. La dimostazione è analoga a quella del Teorema precedente, con la differenza che, essendo sul campo reale, dovremo porre, per $i = 1, \dots, r$

$$\boldsymbol{e}'_i := \frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{a_{ii}}} \quad \text{se} \quad a_{ii} > 0, \qquad \boldsymbol{e}'_i := \frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{-a_{ii}}} \quad \text{altrimenti.}$$

□

Definizione 3.32. *Nelle notazioni del Teorema precedente, definiamo* p ***indice di positività****,* $r-p$ ***indice di negatività*** *e la coppia* $(p, r-p)$ ***segnatura****.*

Osservazione 3.33. *Il Teorema di Sylvester vale, più in generale, nel caso di uno spazio vettoriale metrico su un campo euclideo, se per* ***campo euclideo*** *si intende un campo ordinato in cui i quadrati sono tutti e soli gli elementi positivi o nulli.*

Definizione 3.34. *In questo caso, considerando la forma quadratica* $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ *associata a "$\cdot$", diremo che il* ***prodotto scalare*** *(o la forma quadratica) è*

- ***definito positivo*** *se* $\forall \boldsymbol{v} \in V^* \;:\; q(\boldsymbol{v}) > 0$*;*

- ***definito negativo*** *se* $\forall \boldsymbol{v} \in V^* \;:\; q(\boldsymbol{v}) < 0$*;*

- ***semidefinito positivo*** *se* $\forall \boldsymbol{v} \in V^* \;:\; q(\boldsymbol{v}) \geq 0$*;*

- ***semidefinito negativo*** *se* $\forall \boldsymbol{v} \in V^* \; : \; q(\boldsymbol{v}) \leq 0$*;*

- ***indefinito*** *altrimenti, cioè se* $\exists \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V \; : \; q(\boldsymbol{v}_1) < 0 < q(\boldsymbol{v}_2)$*.*

Se $V = V_n(\mathbb{K})$ è di dimensione finita sul campo euclideo $\mathbb{K}$, a ciascuno dei casi sopra citati corrisponde una determinata **forma canonica** e una determinata segnatura per il prodotto scalare (o per la forma quadratica):

Forma quadratica	**Forma canonica**	**Segnatura**
definita positiva	$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$	$(n, 0)$
definita negativa	$q(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - \cdots - x_n^2$	$(0, n)$
semidefinita positiva	$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_r^2, \quad r \leq n$	$(r, 0)$
semidefinita negativa	$q(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - \cdots - x_r^2$	$(0, r)$
indefinita	$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$	$(p, r-p)$

Corrispondentemente, abbiamo la stessa terminologia per le matrici simmetriche reali (o, più in generale, su un campo euclideo $\mathbb{K}$).

Esempio 3.35. *Su* $\mathbb{R}^2$ *si consideri la forma bilineare*

$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2.$$

- *Vediamo che è un prodotto scalare.*

  Scriviamo la matrice associata a b:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  Poiché A è simmetrica, b è un prodotto scalare.

- *Proviamo che è indefinito.*

$$q(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 3x_1 + 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$q(0,1) = -1 < 0 \quad \text{e} \quad q(1,0) = 3 > 0,$$

  quindi q è indefinita, ovvero b è indefinito.

In generale ci chiediamo se esistano criteri per stabilire il "segno" di una forma quadratica reale, semplicemente studiando la sua matrice (rispetto a una base fissata). Vale il seguente

Teorema 3.36. *Una matrice simmetrica reale* $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *è definita positiva (risp. negativa) se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi (risp. negativi), semidefinita positiva (risp. semidefinita negativa) se e solo se tutti gli autovalori sono non negativi (risp. non positivi).*

Capitolo 4

Spazi Vettoriali Euclidei

Definizione 4.1. *Uno spazio vettoriale reale $V(\mathbb{R})$, dotato di prodotto scalare "$\cdot$" definito positivo si dice **spazio vettoriale euclideo** $(V(\mathbb{R}), \cdot)$.*

Dalla Definizione segue subito che:

- $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ ovvero $(V, \cdot)$ è non degenere;

- $q(\boldsymbol{v}) = 0 \iff \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, ovvero $(V, \cdot)$ è anisotropo.

Un prodotto scalare definito positivo viene anche detto **prodotto scalare euclideo**.
Vediamo ora che ogni prodotto scalare euclideo permette di introdurre in uno spazio vettoriale reale tutte le nozioni di natura metrica, e cioè , oltre all'ortogonalità, anche la lunghezza di un vettore e l'angolo tra due vettori.

1 Nozioni metriche

1.1 Norma o lunghezza

Poichè $q(\boldsymbol{v}) \geq 0$ per ogni $\boldsymbol{v} \in V(\mathbb{R})$, possiamo considerare la funzione **norma**

$$\| \ \| \ : \left\{ \begin{array}{ccc} V(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \\ \boldsymbol{v} & \longmapsto & \|\boldsymbol{v}\| := \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \end{array} \right. .$$

Definizione 4.2. *Si dice **versore** un vettore $\boldsymbol{v} \in V(\mathbb{R})$ di norma unitaria, cioè tale che $\|\boldsymbol{v}\| = 1$.*

Osservazione 4.3. *Se* $\boldsymbol{v} \in V^*$*, segue subito dalla Definizione di norma che* $\|\boldsymbol{v}\| > 0$*, quindi si può definire il vettore*

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|},$$

detto il ***versore di*** $\boldsymbol{v}$*: risulta infatti*

$$\|\boldsymbol{u}\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\,\|\boldsymbol{v}\| = 1.$$

Dati due vettori $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V(\mathbb{R})^*$ diciamo che $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ hanno la stessa **direzione** se $\boldsymbol{w} = k\boldsymbol{v}$ e hanno lo **stesso verso** se $k > 0$, **verso opposto** se $k < 0$.
Quindi $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ è un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\boldsymbol{v}$. Anzi, al vettore $\boldsymbol{v}$ possiamo associare due versori, uno opposto all'altro, cioè rispettivamente

$$\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \qquad \text{e} \qquad -\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

Proposizione 4.4. *Per ogni* $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V(\mathbb{R})$ *e per ogni* $k \in \mathbb{R}$*, valgono le seguenti proprietà:*

(a) $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$ *e* $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ *se e solo se* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$*;*

(b) $\|k\boldsymbol{v}\| = |k|\,\|\boldsymbol{v}\|$*;*

(c) $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \leq \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$ *(*disuguaglianza di Schwartz*);*

(d) $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$ *(*disuguaglianza triangolare*).*

Le dimostrazioni dei punti (a) e (b) sono immediate conseguenze della Definizione di norma. Per i punti (c) e (d) si rimanda, per esempio a [1, pagg. 210-211].

Osservazione 4.5. *Dati* $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V(\mathbb{R})$*, se* $\boldsymbol{v}$ *è un versore il coefficiente di Fourier di* $\boldsymbol{w}$ *rispetto a* $\boldsymbol{v}$ *(si veda pagina 70) è* $\alpha_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$*.*

1.2 Angolo

Siano $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V(\mathbb{R})^*$, per la disuguaglianza di Schwartz si ha:

$$\frac{|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}|}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|} \leq 1,$$

da cui

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|} \leq 1.$$

Allora esiste uno ed un solo numero reale $\alpha \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos \alpha = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|},$$

per cui

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\| \cos \alpha.$$

1.3 Proiezione ortogonale

Riprendendo la decomposizione di un generico vettore $\boldsymbol{w} \in V$ rispetto ad un vettore anisotropo $\boldsymbol{v} \in V$, vista a pagina 69, abbiamo:

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{q(\boldsymbol{v})} \boldsymbol{v} + \left(\boldsymbol{w} - \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{q(\boldsymbol{v})} \boldsymbol{v} \right).$$

Poniamo

$$\boldsymbol{w}_1 := \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{q(\boldsymbol{v})} \boldsymbol{v} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{w}_2 := \boldsymbol{w} - \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{q(\boldsymbol{v})} \boldsymbol{v}.$$

Il vettore $\boldsymbol{w}_1$, che è detto **proiezione ortogonale di $\boldsymbol{w}$ su $\boldsymbol{v}$**, risulta avere norma

$$\|\boldsymbol{w}_1\| = \frac{\|\boldsymbol{v}\|^2 \, \|\boldsymbol{w}\| \, |\cos \alpha|}{\|\boldsymbol{v}\|^2} = \|\boldsymbol{w}\| \, |\cos \alpha|.$$

2 Sviluppi algebrici

Negli spazi vettoriali euclidei di dimensione finita il Teorema di esistenza di basi ortogonali si specializza in un teorema più forte, che fornisce addirittura un algoritmo per trasformare una base qualunque in una base ortogonale: questo è il processo di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**. Da una base ortogonale, normalizzando i vettori, si ottiene subito una **base ortonormale**, cioè una base ortogonale costituita da versori, rispetto alla quale il prodotto scalare euclideo è

rappresentato dalla matrice identica I_n di ordine n. Si ritrova così il risultato già espresso dal Teorema di Sylvester (3.31) per il caso $p = r = n$ (segnatura $(n, 0)$), che si può enunciare come segue:
ogni prodotto scalare euclideo su uno spazio di dimensione finita $V_n(\mathbb{R})$ può essere rappresentato dalla matrice identica I_n.
Equivalentemente, *ogni matrice reale simmetrica definita positiva $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ è congruente alla matrice identica I_n.*
Introdurremo infine le matrici ortogonali che hanno un doppio ruolo in $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$:

- esprimono il passaggio da una base ortonormale ad un'altra, pure ortonormale;

- rappresentano gli automorfismi di $V_n(\mathbb{R})$ che conservano il prodotto scalare (isometrie).

2.1 Processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmitd

Teorema 4.6. *In uno spazio vettoriale euclideo $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$ sia $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ una base. Allora la successione*

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 \qquad\qquad \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_2 - \frac{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_1}{q(\boldsymbol{e}'_1)}\boldsymbol{e}'_1$$

$$\boldsymbol{e}'_n = \boldsymbol{e}_n - \frac{\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}'_{n-1}}{q(\boldsymbol{e}'_{n-1})}\boldsymbol{e}'_{n-1} - \cdots - \frac{\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}'_1}{q(\boldsymbol{e}'_1)}\boldsymbol{e}'_1$$

è una base ortogonale di $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

Per la dimostrazione si veda, ad esempio, [1, pag. 213].

2.2 Basi ortonormali

Definizione 4.7. *Una **base** $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ di $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$ si dice **ortonormale** se:*

(a) $\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$ *per ogni* $i = 1, \dots, n$;

(b) $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 0$ *per ogni* $i, j = 1, \dots, n$ *con* $i \neq j$.

Osservazione 4.8. *Se $\mathscr{B}$ è una base ortonormale, la matrice del prodotto scalare rispetto a $\mathscr{B}$ è*

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_1 & \dots & \dots & \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

e, se $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^n y_i \boldsymbol{e}_i$, allora

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \qquad e$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Teorema 4.9. *Uno spazio vettoriale euclideo $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$ ammette sempre una base ortonormale.*

Dimostrazione. Basta prendere una base ortogonale $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ e considerare $\overline{\mathscr{B}} = (\frac{\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{e}_1\|}, \dots, \frac{\boldsymbol{e}_n}{\|\boldsymbol{e}_n\|})$. □

Riassumendo:

- Se "$\cdot$" è un prodotto scalare definito su $V_n(\mathbb{K})$, allora è sempre possibile determinare una base (ortogonale) per cui

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i = a_1 x_1 y_1 + \dots + a_n x_n y_n.$$

- Se "$\cdot$" è un prodotto scalare euclideo su $V_n(\mathbb{R})$, allora è sempre possibile determinare una base (ortonormale) per cui

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Osservazione 4.10. *Quando in $\mathbb{R}^n$ consideriamo il prodotto scalare euclideo*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = [x_1 \quad \dots \quad x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

lo chiameremo ***prodotto scalare standard****. Rispetto ad esso la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.*

2.3 Matrici ortogonali

Definizione 4.11. *Una **matrice** $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ si dice **ortogonale** se $A^{-1} = A^T$*

Esempio 4.12. *La matrice*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

è ortogonale, infatti la sua inversa conincide con la trasposta.

Proposizione 4.13. *Se $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ è una matrice ortogonale, allora*

$$\det A = \pm 1.$$

Dimostrazione. Per ipotesi $A^T A = I_n$. Passando ai determinanti si ha

$$1 = \det I_n = \det A^T A = \det A \ \det A^T = (\det A)^2,$$

quindi $\det A = \pm 1$. □

Le matrici ortogonali hanno un ruolo fondamentale negli spazi vettoriali euclidei. Innanzi tutto, tale ruolo è evidenziato dal seguente

Teorema 4.14. *In $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$, siano $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ e $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n)$ due basi ortonormali e sia $H \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ la matrice del cambiamento di base. Allora la matrice H è ortogonale.*

Dimostrazione. Risulta: $I_n = H^T I_n H = H^T H$, da cui $H^{-1} = H^T$. □

Per la Proposizione (4.14), le formule che danno le componenti dei vettori rispetto a due basi ortonormali $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ diventano più semplici:

$$\boldsymbol{x} = H\boldsymbol{x}' \qquad \boldsymbol{x}' = H^T\boldsymbol{x}.$$

Un altro aspetto del ruolo assunto dalle matrici ortogonali è espresso attraverso il concetto di isometria:

Definizione 4.15. *In $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$, un automorfismo T si dice **isometria** quando*

$$\text{per ogni} \quad \boldsymbol{v} \in V_n(\mathbb{R}) \quad \text{si ha} \quad \|T(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|,$$

ovvero

$$\text{per ogni} \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_n(\mathbb{R}) \quad \text{si ha} \quad T(\boldsymbol{v}) \cdot T(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}.$$

È immediato verificare che le due condizioni sono equivalenti (esercizio).

Osservazione 4.16. *L'insieme di tutte le isometrie di $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni, denotato con $\mathscr{O}(V_n) = \mathscr{O}_n(V)$.*

Dalla Definizione di isometria e dal Teorema (4.14), segue il

Teorema 4.17. *Sia $T \in \mathrm{End}(V_n(\mathbb{R}))$, allora sono fatti equivalenti:*

(a) T è una isometria;

(b) T trasforma basi ortonormali in basi ortonormali;

(c) la matrice della rappresentazione scalare di T rispetto ad una qualsiasi base ortonormale è ortogonale.

Dunque una matrice ortogonale $H \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ si può interpretare, relativamente a $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$, come la matrice che rappresenta

- un cambiamento di base ortonormale;
- l'applicazione di un'isometria ai vettori di $V_n(\mathbb{R})$ riferiti ad una base ortonormale.

3 Isometrie di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

Vogliamo ora determinare il gruppo $\mathscr{O}_2(\mathbb{R})$ di tutte le isometrie di $\mathbb{R}^2$ rispetto al prodotto scalare standard.
Il problema si riconduce a determinare tutte le matrici ortogonali $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, cioè tali che $A^T = A^{-1}$, ovvero $A^T A = I_2$.
Se $A = [a_{ij}]$, tale relazione si traduce in

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ciò equivale a richiedere che esistano due angoli $\vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_{11} = \cos\vartheta, \qquad a_{21} = \sin\vartheta, \qquad a_{12} = \sin\varphi, \qquad a_{22} = \cos\varphi$$

e inoltre

$$0 = \cos\vartheta \sin\varphi + \sin\vartheta \cos\varphi = \sin(\vartheta + \varphi).$$

Quindi

$$\varphi = -\vartheta, \qquad \text{oppure} \qquad \varphi = \pi - \vartheta.$$

Corrispondentemente, la matrice A è necessariamente di uno dei due tipi seguenti:

$$R_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}, \qquad \text{oppure} S_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Possiamo interpretare geometricamente le isometrie corrispondenti alle matrici R_ϑ e S_ϑ come segue.

(R_ϑ) Sia $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se ψ è l'angolo tra il vettore $\boldsymbol{e}_1$ e il vettore $\boldsymbol{x}$, possiamo scrivere

$$x_1 = \|\boldsymbol{x}\| \cos\psi \qquad \text{e} \qquad x_2 = \|\boldsymbol{x}\| \sin\psi.$$

Allora, applicando R_ϑ, si ottiene

$$R_\vartheta(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{x}\| (\cos\vartheta\cos\psi - \sin\vartheta\sin\psi) \\ \|\boldsymbol{x}\| (\sin\vartheta\cos\psi + \cos\vartheta\sin\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{x}\| \cos(\vartheta+\psi) \\ \|\boldsymbol{x}\| \sin(\vartheta+\psi) \end{bmatrix},$$

cioè $R_\vartheta(\boldsymbol{x})$ è il vettore che ha la stessa norma di $\boldsymbol{x}$ e che forma con $\boldsymbol{e}_1$ l'angolo $\vartheta + \psi$, in altre parole R_ϑ rappresenta la **rotazione di angolo** ϑ (in senso antiorario).

In particolare, se $\vartheta = \pi$, allora

$$R_\pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

rappresenta la **simmetria centrale**: $R_\pi(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$.

(S_ϑ) Riguardo a S_ϑ, notiamo prima di tutto che,

- se $\vartheta = 0$, allora

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  e per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$S_0(x_1, x_2) = (x_1, -x_2),$$

  quindi S_0 rappresenta la **simmetria rispetto a** $<\boldsymbol{e}_1>$, l'asse delle x_1;

– se $\vartheta = \pi$, allora
$$S_\pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
e per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ si ha
$$S_0(x_1, x_2) = (-x_1, x_2),$$
quindi S_π rappresenta la **simmetria rispetto a** $<\boldsymbol{e}_2>$, l'asse delle x_2.

In generale, si può calcolare che
$$S_{2\vartheta} = R_\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} R_{-\vartheta}$$
rappresenta la **simmetria rispetto a** $< \boldsymbol{e}_\vartheta >$, dove $\boldsymbol{e}_\vartheta$ è un vettore che forma l'angolo ϑ con $\boldsymbol{e}_1$. Risulta:
$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad (\boldsymbol{x} - S_{2\vartheta}\boldsymbol{x}) \perp \boldsymbol{e}_\vartheta.$$

In conclusione, le isometrie di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *rispetto al prodotto scalare canonico sono tutte e sole le rotazioni e le simmetrie rispetto a sottospazi unidimensionali (rette vettoriali).*

4 Il Teorema spettrale

Sia $(V(\mathbb{R}), \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo.

Definizione 4.18. *Un endomorfismo* $T \in \mathrm{End}(V)$ *si dice* ***endomorfismo simmetrico*** *o* ***autoaggiunto*** *di* $(V(\mathbb{R}), \cdot)$ *se per ogni* $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ *si ha*
$$T(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot T(\boldsymbol{w}).$$

Proposizione 4.19. *Un endomorfismo* T *di* $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$ *è simmetrico se e solo se rispetto ad una base ortonormale si rappresenta mediante una matrice simmetrica* $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Siano $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ e sia A la matrice dell'endomorfismo T rispetto a una base ortonormale. Allora
$$T(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = (A\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v} \cdot T(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y}.$$

Le due espressioni sono uguali se e solo se $A = A^T$. □

Lemma 4.20. *Sia $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale. Allora il suo polinomio caratteristico ha tutte le radici in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Poiché la matrice A è reale, essa coincide con la sua complessa coniugata $\overline{A}$, quindi

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \iff \overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}} \iff A\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}},$$

da cui

$$\lambda\, \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^T(\lambda\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{x}}^T(A\boldsymbol{x}) = (\overline{\boldsymbol{x}}^T A)\boldsymbol{x} = (A\overline{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{x} = (\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\, \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x},$$

dunque $\lambda = \overline{\lambda}$. □

Lemma 4.21. *Sia $T \in \mathrm{End}V$ un endomorfismo simmetrico di $(V(\mathbb{R}), +)$. Se λ e μ sono autovalori distinti di T, allora gli autospazi ad essi relativi V_λ e V_μ sono ortogonali.*

Dimostrazione. Siano $\boldsymbol{v} \in V_\lambda$, $\boldsymbol{w} \in V_\mu$. Si ha

$$\lambda(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) = \lambda\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}\cdot T(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\cdot\mu\boldsymbol{w} = \mu(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}),$$

da cui, essendo $\lambda \neq \mu$, segue $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0$. □

Teorema 4.22 (Teorema Spettrale).

I FORMA *Ogni endomorfismo simmetrico di $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$ ammette una base ortonormale di autovettori.*

II FORMA *Ogni matrice simmetrica reale è ortogonalmente simile a una matrice diagonale.*

$\boxed{\text{III FORMA}}$ *Ogni forma quadratica* $q : V_n \longrightarrow \mathbb{R}$ *ammette una base diagonalizzante ortonormale rispetto a "$\cdot$".*

La dimostrazione del Teorema Spettrale, enunciato nella I forma, si basa sul Lemma (4.20) e sull'induzione, per provare che l'endomorfismo simmetrico è diagonalizzabile. Come già sappiamo, la base diagonalizzante può essere presa ortonormale, ed in tal caso essa verrà chiamata **base spettrale** per l'endomorfismo simmetrico.

Capitolo 5

Spazi Affini Euclidei

Definizione 5.1. *Si dice* ***spazio affine euclideo*** *di dimensione n sul campo reale, uno spazio affine* $\mathbb{A}[\mathscr{A}, (V_n(\mathbb{R}), \cdot), a]$ *in cui* $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$ *è uno spazio vettoriale euclideo (cioè con prodotto scalare "·" definito positivo). Lo si indica con* $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$.

L'esistenza di un prodotto scalare definito positivo ci permette di introdurre tutti i concetti metrici in tale spazio.

1 Distanza e angoli in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$

Definizione 5.2. *Se* $P_1, P_2 \in \mathbb{E}_n$ *si definisce loro* ***distanza*** *il numero reale non negativo*

$$d(P_1, P_2) := \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\|$$

Proposizione 5.3. *Siano* $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{E}_n$. *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) $d(P_1, P_2) = 0$ *se e solo se* $P_1 = P_2$;

(b) $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$;

(c) $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$.

Dimostrazione.

(a) $d(P_1, P_2) = 0 \iff \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = 0 \iff \overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{0} \iff P_1 = P_2$.

(b) $d(P_1, P_2) = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = \left\| - \overrightarrow{P_2P_1} \right\| = |-1| \left\| \overrightarrow{P_2P_1} \right\| = \left\| \overrightarrow{P_2P_1} \right\| = d(P_2, P_1)$.

(c) Poniamo $\boldsymbol{v}_1 = \overrightarrow{P_2P_3}$, $\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}$, $\boldsymbol{v}_3 = \overrightarrow{P_1P_2}$. Per le proprietà degli spazi affini, si ha

$$\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1.$$

Per la disuguaglianza triangolare della norma

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_3}\right\| = \|\boldsymbol{v}_2\| = \|\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1\| \leq \|\boldsymbol{v}_3\| + \|\boldsymbol{v}_1\| = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{P_2P_3}\right\|,$$

da cui

$$d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

$\square$

Se si considera una retta $r = [P, V_1]$ in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$, nel sottospazio V_1 esistono esattamente due versori, l'uno opposto all'altro: $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_1$: diremo che ciascuno dei due versori individua un **verso sulla retta** r e la coppia costituita dalla retta r e da uno dei due versori verrà detta **retta orientata** $(r, \boldsymbol{v}_i)$, per $i = 1, 2$.

Definizione 5.4. *Siano r ed r' due rette di $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$. Dicesi* ***angolo fra*** *le* ***due rette*** *l'angolo fra una coppia di vettori non nulli che appartengono ai due sottospazi 1-dimensionali che individuano le rette date.*

Siano

$$r = [A, V_1], \qquad r' = [B, V_1'], \qquad \text{con } V_1 = <\boldsymbol{v}_1>, \qquad V_1' = <\boldsymbol{v}_1'> .$$

Quindi, per definizione,

$$\cos \widehat{rr'} = \frac{k\boldsymbol{v} \cdot k'\boldsymbol{v}'}{\|k\boldsymbol{v}\| \, \|k'\boldsymbol{v}'\|} = \frac{kk'}{|k||k'|} \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}'}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{v}'\|} = \pm \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}'}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{v}'\|}$$

Le due rette definiscono allora due angoli α ed α' tali che

$$\cos \alpha' = -\cos \alpha \qquad\qquad 0 \leq \alpha \leq \pi,$$

dunque

$$\alpha + \alpha' = \pi,$$

cioè due rette individuano due angoli supplementari. L'angolo sarà invece univocamente determinato se si considera ciascuna delle due rette orientata. In particolare, due rette parallele determinano un angolo nullo o piatto, a seconda del verso che si considera su ciascuna di esse.

Osservazione 5.5. *In base alla Definizione, l'angolo (o il suo supplementare) fra due rette r ed s dipende solo dalle direzioni delle due rette, e quindi non varia se si sostituiscono r ed s con due rette r' ed s', con $r' \parallel r$ ed $s' \parallel s$.*

Definizione 5.6. *Due rette r ed r' sono* ***ortogonali*** *se l'angolo $\widehat{rr'} = \pi/2$.*

Proposizione 5.7. *Siano $r = [P, V_1], s = [Q, W_1]$ due rette di $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$. Allora*

$$r \perp s \iff V_1 \subseteq W_1^{\perp} \qquad (\textit{equivalentemente}\, W_1 \subseteq V_1^{\perp}).$$

Dimostrazione.

$$r \perp s \iff \cos \widehat{rs} = 0 \iff \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in V_1^*$, $\boldsymbol{w} \in W_1^*$. Dunque ogni vettore di V_1 è ortogonale ai vettori di W_1, per cui $V_1 \subseteq W_1^{\perp}$. □

Osservazione 5.8. *In dimensione 2, si ha* $\dim W_1^{\perp} = 1$*, quindi*

$$r \perp s \iff V_1 = W_1^{\perp}.$$

In dimensione maggiore di 2, invece, l'inclusione è propria perché $\dim W_1^{\perp} = n - 1 > 1 = \dim V_1$.

2 Ortogonalità in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

Come abbiamo appena osservato, se $r = [P, V_1], s = [Q, W_1]$ sono due rette del piano euclideo $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, si ha:

$$r \perp s \iff V_1 = W_1^{\perp}.$$

Osservazione 5.9. *Due rette perpendicolari r ed s, non essendo parallele poichè $W_1 \cap W_1^{\perp} = \emptyset$, devono necessariamente avere in comune uno e un solo punto.*

Teorema 5.10 (Esistenza e unicità della perpendicolare). *In $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, dati una retta $r = [P, V_1]$ e un punto Q esiste ed è unica la retta s passante per Q e ortogonale a r.*

Dimostrazione. La retta cercata è $s = [Q, V_1^\perp]$. □

2.1 Distanza punto-retta

Definizione 5.11. *Siano r una retta e P_0 un punto. Detta n la retta per P_0 ortogonale ad r, sia H il punto di intersezione di r con n. La* ***distanza del punto*** *P_0* ***dalla retta*** *r è definita come segue*

$$d(P_0, r) := d(P_0, H).$$

Osserviamo che se P è un qualsiasi punto di r allora $\overrightarrow{P_0H}$ è la proiezione ortogonale di $\overrightarrow{P_0P}$ sulla retta n. Se $\boldsymbol{v}_n$ è un qualsiasi vettore di n e $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{P_0P}$, allora

$$\overrightarrow{P_0H} = \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_n}{\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{v}_n} \boldsymbol{v}_n,$$

Se poi per $\boldsymbol{v}_n$ si prende in particolare un versore normale ad r, si ottiene

$$d(P_0, H) = \left\| \overrightarrow{P_0H} \right\| = \|(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n\| = |\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_n| \, \|\boldsymbol{v}_n\| = |\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_n|,$$

per la disuguaglianza di Schwartz,

$$|\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_n| \leq \|\boldsymbol{w}\| \, \|\boldsymbol{v}_n\| = \|\boldsymbol{w}\| = \left\| \overrightarrow{P_0P} \right\| = d(P_0, P).$$

In conclusione risulta che la *distanza di un punto P_0 da una retta r è il valore minimo che assumono le distanze del punto P_0 da ciscun punto di r.*

3 Ortogonalità in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Definizione 5.12. *In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ una* ***retta*** *$r = [P, V_1]$ è* ***ortogonale al piano*** *$\alpha = [Q, V_2]$ se e solo se $V_1^\perp = V_2$ (o, equivalentemente, $V_2^\perp = V_1$).*

3.1 Ortogonalità tra rette e piani

Nello spazio euclideo tridimensionale il Teorema di esistenza e unicità della perpendicolare che vale nel piano risulta sdoppiato in due enunciati, come possiamo notare nelle parti (a) e (b) del seguente Teorema.

Teorema 5.13. *Nello spazio euclideo tridimensionale valgono le seguenti proprietà:*

(a) dati il punto P e la retta r, esiste ed è unico il piano passante per P e ortogonale a r;

(b) dati il punto P e il piano α, esiste ed è unica la retta passante per P e ortogonale ad α;

(c) siano r una retta ed α un piano. Se $r \perp \alpha$ allora ogni retta s contenuta in α è ortogonale ad r.

3.2 Angoli e ortogonalità fra piani

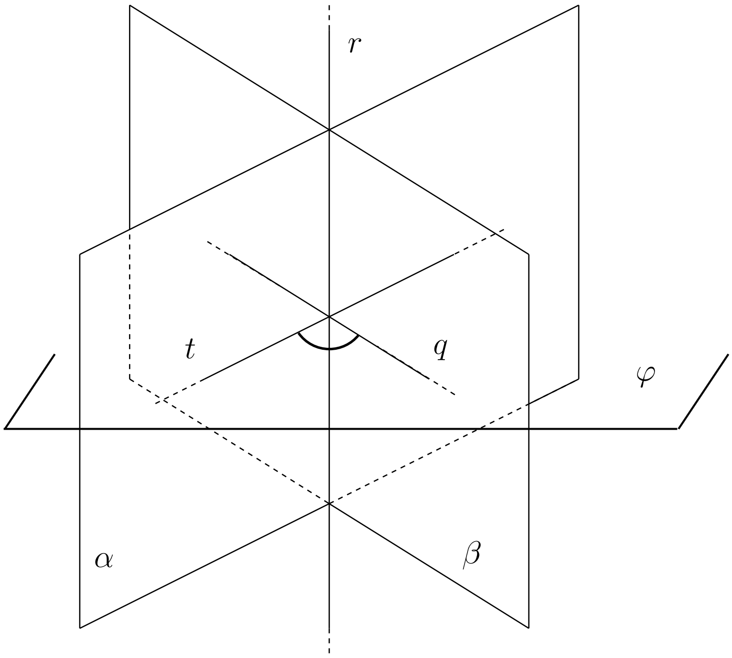
Definizione 5.14. *Siano α e β due piani incidenti e sia $r = \alpha \cap \beta$. Consideriamo un qualsiasi piano φ ortogonale ad r; dette t e q le intersezioni di tale piano con α e β rispettivamente, definiamo l'**angolo tra** i **due piani** α e β come segue:*

$$\widehat{\alpha\beta} := \widehat{tq}.$$

*Diremo che tale angolo è **nullo, o piatto,** se i due piani sono paralleli.*

Osservazione 5.15. *Si osservi che questa definizione di angolo fra piani è indipendente dal piano φ: se si considera infatti un altro piano ψ ortogonale ad r, risulta $\psi \parallel \varphi$ e si verifica subito che allora le rette $t' = \psi \cap \alpha$ e $q' = \psi \cap \beta$ sono parallele rispettivamente a t e q, da cui $\widehat{t'q'} = \widehat{tq}$.*
Inoltre indicata con n una retta ortogonale (o normale) ad α e con n' una retta ortogonale a β, si dimostra (esercizio!) che

$$\widehat{\alpha\beta} = \widehat{nn'},$$



cioè che l'angolo che si forma tra due piani è uguale all'angolo che si forma tra due rette normali ad essi.
*In questo modo, si può subito ripetere anche per l'angolo fra due piani l'Osservazione (5.5), affermando che l'**angolo fra due piani**, così come l'**angolo fra due rette è invariante per parallelismo**.*

Definizione 5.16. *Diremo che due **piani** α e β sono **ortogonali** se*

$$\widehat{\alpha\beta} = \pi/2.$$

Teorema 5.17. *Siano $\alpha = [P, V_2]$ e $\beta = [Q, W_2]$ due piani di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$. Allora*

$$\alpha \perp \beta \iff V_2^{\perp} \subseteq W_2 \qquad (\textit{equivalentemente } W_2^{\perp} \subseteq V_2).$$

Teorema 5.18. *Siano α un piano ed r una retta, allora:*

(a) se $r \perp \alpha$, allora ogni piano passante per r è ortogonale ad α;

(b) se $r \not\perp \alpha$, allora esiste uno ed un solo piano passante per r ed ortogonale ad α;

(c) per un punto passa uno ed un solo fascio di piani ortogonali a un piano fissato.

3.3 Distanza punto-retta

Definizione 5.19. *Siano r una retta e P_0 un punto. Detto α il piano passante per P_0 e ortogonale alla retta r, sia H il punto di intersezione di α con r. La **distanza del punto** P_0 **dalla retta** r è definita come segue*

$$d(P_0, r) := d(P_0, H).$$

3.4 Distanza punto-piano

Definizione 5.20. *Siano α un piano e P_0 un punto. Detta r la retta passante per P_0 e ortogonale al piano α, sia H il punto di intersezione di α con r. La **distanza del punto** P_0 **dal piano** α è definita come segue*

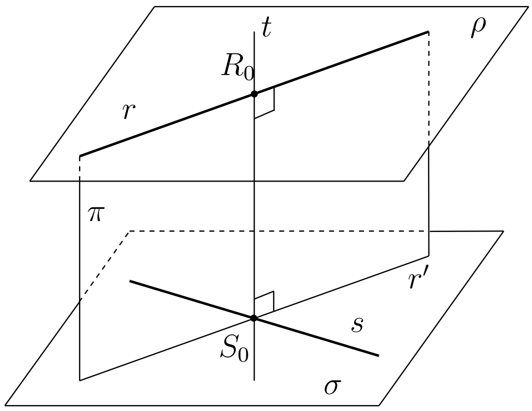
$$d(P_0, \alpha) := d(P_0, H).$$

Sia per la distanza punto-retta nello spazio che per la distanza punto-piano, si può ripetere la stessa osservazione che abbiamo fatto a proposito della distanza punto-retta nel piano, per concludere che la *distanza di un punto P_0 da una retta r o da un piano α è il valore minimo che assumono le distanze del punto P_0 da ciscun punto di r o, rispettivamente, di α.*

3.5 Retta di minima distanza fra due rette sghembe

Anche per il caso di due rette sghembe r ed s nello spazio tridimensionale ha senso definire una nozione di distanza fra le due rette date. È vero infatti che, se si fa variare un punto $R \in r$, la distanza $d(R, s)$ varia al variare di R, tuttavia è possibile dimostrare che tale distanza non assume tutti i possibili valori reali positivi o nulli, ma che essa assume un valore minimo strettamente positivo: tale valore minimo viene detto la **minima distanza fra le due rette sghembe** r ed s (che è dato dalla distanza tra i punti $R_0 \in r$ ed $S_0 \in s$ tali che $\mathrm{rt}(R_0, S_0) \perp r$ e $\mathrm{rt}(R_0, S_0) \perp s$). Per provare tutto ciò, premettiamo la seguente

Proposizione 5.21. *Date due rette sghembe r ed s in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, esiste ed è unica la retta t perpendicolare ed incidente ad entrambe.*



Dimostrazione. Siano ρ e σ i due piani paralleli che contengono rispettivamente la retta r e la retta s (si veda (g) della Proposizione (1.19)) e si consideri il piano π (univocamente determinato secondo (b) del Teorema (5.18)) passante per r e ortogonale a ρ e σ; si intersechi π con σ, ottenendo la retta r', che è incidente a s in un punto S_0 (perché?). Da S_0 si mandi la retta perpendicolare a ρ (e anche a σ), univocamente determinata per la parte (b) del Teorema (5.13). Tale retta determina con r' un piano perpendicolare a ρ e σ che quindi deve coincidere con π e dunque, essendo complanare e ortogonale alla retta r, risulta essere incidente a r in un punto R_0. Essa è perciò la retta t cercata ed è univocamente determinata dalle condizioni imposte per costruirla. $\square$

Si considerino ora i punti $R_0 := r \cap t$ ed $S_0 := s \cap t$: risulta che

$$d(R_0, S_0) = d(R_0, \sigma) = \min \{d(R_0, X) \;:\; X \in \sigma\} = \min \{d(R_0, X) \;:\; X \in s\}$$

(analogamente per il punto S_0). Questo ci permette di concludere che $d(R_0, S_0)$ è la minima distanza tra un punto generico della retta r ed un punto generico della retta s e giustifica pertanto la seguente definizione:

Definizione 5.22. *Date due rette sghembe r ed s in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, la **distanza minima tra** r **ed** s è*

$$d_{\min}(r, s) := d(R_0, S_0)$$

(con R_0 ed S_0 determinati in base alle precedenti osservazioni).

4 Geometria analitica in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$

Definizione 5.23. *In $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ si dice* ***riferimento cartesiano (ortogonale monometrico)*** *un riferimento affine $[O, \mathscr{B}]$ in cui $\mathscr{B}$ è una base ortonormale dello spazio vettoriale euclideo $(V_n(\mathbb{R}), \cdot)$*

Ad ogni punto P competono coordinate cartesiane $(x_1, \dots, x_n)$.
Dati due punti $P = (x_1, \dots, x_n)$ e $Q = (x'_1, \dots, x'_n)$, possiamo considerare il vettore

$$\overrightarrow{PQ} = (x'_1 - x_1)\, \boldsymbol{e}_1 + \cdots + (x'_n - x_n)\, \boldsymbol{e}_n$$

. Poichè $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ è una base ortonormale, la distanza $d(P, Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\|$ risulta:

$d(P, Q) = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}$ **formula della distanza tra** 2 **punti**.

4.1 Cambiamento di riferimento cartesiano

Dati due riferimenti cartesiani

$$[O, \mathscr{B}] \qquad \text{e} \qquad [O', \mathscr{B}'],$$

Supponiamo che un punto P abbia coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto a $[O, \mathscr{B}]$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ rispetto a $[O', \mathscr{B}']$. Siccome i riferimenti sono riferimenti affini, sappiamo che

$$\boldsymbol{x}' = M^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}),$$

dove M è la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$.
D'altra parte sappiamo che la matrice che fa passare da una base ortonormale $\mathscr{B}$ a un'altra base ortonomormale $\mathscr{B}'$ è ortogonale, cioè $M^{-1} = M^T$. Dunque, nel nostro caso,

$$\boldsymbol{x}' = M^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{x} = M\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{t}.$$

5 Geometria analitica in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

In $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, fissiamo un riferimento cartesiano $[O, \mathscr{B}]$ con $\mathscr{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, base ortonormale.

Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti. Allora la **distanza tra i due punti** P_1 e P_2 è

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

5.1 Circonferenze nel piano

Definizione 5.24. *Nel piano euclideo reale* $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ *una* circonferenza *è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso (detto* centro *della circonferenza). Chiamiamo* raggio *la distanza di un generico punto della circonferenza dal suo centro.*

Consideriamo $C = (\alpha, \beta)$ un punto di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ ed R un numero reale positivo. Sia $P = (x, y) \in \mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ tale che $d(P, C) = R$. Otteniamo:

$$\Sigma : \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 .$$

Pertanto l'equazione di una circonferenza è data da

$$\Sigma : \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 .$$

Possiamo dunque osservare che una circonferenza nel piano euclideo $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ è rappresentata da un'equazione di secondo grado priva dei termini rettangolari e in cui i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali (e diversi da 0).

Viceversa, un'equazione che abbia le suddette proprietà, cioè del tipo:

$$x^2 + y^2 + ax + by + d = 0 ,$$

con alcuni passaggi algebrici può essere riscritta nella forma:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - d .$$

A questo punto distinguiamo tre casi.

Caso 1. Se $a^2 + b^2 - 4d > 0$ l'equazione data rappresenta una circonferenza con centro

$$C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) ,$$

e raggio

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4d}{4}} .$$

Caso 2. Se $a^2 + b^2 - 4d = 0$ abbiamo una *circonferenza di raggio nullo.* In tal caso l'unico punto (reale) della circonferenza è il centro stesso $C = (-a/2, -b/2)$.
Caso 3. Se $a^2 + b^2 - 4d < 0$ l'equazione rappresenta l'insieme vuoto in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, o, in altre parole, un luogo privo di punti (reali).

I casi 2 e 3 verranno chiariti meglio nel paragrafo 6.1 del Capitolo 8, dopo aver introdotto il piano proiettivo reale ed il suo ampliamento complesso.

5.2 Angolo e ortogonalità fra rette

Consideriamo due rette

$$r \ : \ ax + by + c = 0 \qquad \text{e} \qquad r' \ : \ a'x + b'y + c' = 0.$$

Siano (l, m) e (l', m') due coppie di parametri direttori di r ed r' rispettivamente. Abbiamo visto che

$$\cos \widehat{rr'} = \pm \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}'}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{v}'\|},$$

con $\boldsymbol{v}$ generatore della direzione di r e $\boldsymbol{w}$ generatore della direzione di r'.
Quindi

$$\boldsymbol{v} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{v}' = l'\boldsymbol{i} + m'\boldsymbol{j},$$

da cui

$$\cos \widehat{rr'} = \pm \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l'^2 + m'^2}},$$

che è la **formula dell'angolo fra due rette in fuzione dei parametri direttori**.
La **formula dell'angolo fra due rette in fuzione dei coefficienti delle equazioni cartesiane** si ottiene da $l = b$, $m = -a$, $l' = b'$, $m' = -a'$:

$$\cos \widehat{rr'} = \pm \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

Le due rette sono **perpendicolari** se e solo se

$$ll' + mm' = 0, \qquad \text{equivalentemente} \qquad aa' + bb' = 0.$$

Osservazione 5.25. *Se r ed r' hanno coefficiente angolare (cioè $b, b' \neq 0$), allora, posti $d = -\frac{a}{b}$, $d' = -\frac{a'}{b'}$, la condizione di ortogonalità diventa $dd' = -1$.*

Osservazione 5.26. *Se la retta r ha equazione $ax + by + c = 0$, allora tutte le rette di parametri direttori (a, b) sono ad essa perpendicolari. Esse hanno equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

ed equazione cartesiana

$$bx - ay + k = 0.$$

L'equazione della retta perpendicolare a r e passante per il punto $P = (x_0, y_0)$ è dunque

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

5.3 Coseni direttori di una retta

Definizione 5.27. *Data una retta $r = [P, V_1]$, si dicono* ***coseni direttori*** *le componenti rispetto a $\mathscr{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ dei versori di V_1.*

Sia $V_1 =<\boldsymbol{v}>$, con $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Per ogni $k\boldsymbol{v} \in V_1^*$, si ha

$$\frac{k\boldsymbol{v}}{\|k\boldsymbol{v}\|} = \pm\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|},$$

per cui ogni retta (non orientata) possiede due versori opposti.
Se (l, m) è una coppia di parametri direttori di r, allora

$$\boldsymbol{u}_r = \pm\frac{l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j}}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

e i **coseni direttori** di r **in funzione dei parametri direttori** sono

$$u_x = \pm\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}} \qquad \text{e} \qquad u_y = \pm\frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

Se r è data mediante l'equazione cartesiana

$$ax + by + c = 0,$$

allora $l = b$, $m - a$, quindi i **coseni direttori** di r **in funzione dei coefficienti dell'equazione cartesiana** sono

$$u_x = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{e} \qquad u_y = \pm\frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

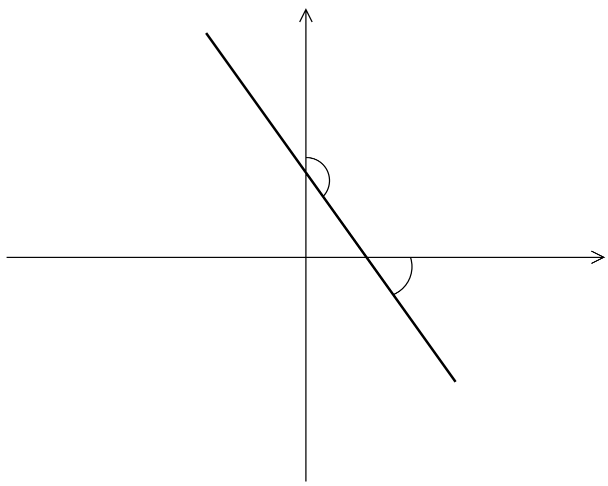
Vale la seguente proprietà:

$$u_x^2 + u_y^2 = 1$$

Inoltre si ha

$$\cos \widehat{rx} = \pm \boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{i} = \pm u_x, \quad \cos \widehat{ry} = \pm \boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{j} = \pm u_y.$$

da qui si deduce l'importante significato geometrico dei coseni direttori di una retta, e precisamente *i coseni direttori di una retta sono i coseni degli angoli che la retta forma con gli assi.*



5.4 Equazione normale della retta

Data la retta r di equazione $ax + by + c = 0$, dividendo per $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$, si ottiene l'equazione

$$\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

I coefficienti di x e di y sono rispettivamente $\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}$: coseni direttori di una retta ortogonale alla retta r. Allora l'equazione di r

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

si chiama **equazione normale della retta** r, perché in essa compaiono come coefficienti di x e di y i coseni direttori di una retta normale ad r.

5.5 Distanza di un punto da una retta

Siano dati una retta $r\ :\ ax+by+c=0$ e un punto $P_0=(x_0,y_0)$. Ricordiamo (cfr. 2.1) che la distanza $d(P_0,r)$ è definita come la distanza $d(P_0,H)$, dove H è l'intersezione della retta r con la retta n perpendicolare ad r e passante per P_0. Vogliamo determinare tale distanza in funzione dei dati.

Sempre in (2.1) abbiamo visto che, se $\boldsymbol{v}_n$ è un qualsiasi vettore di n e $\boldsymbol{w}=\overrightarrow{P_0P}$, allora

$$\overrightarrow{P_0H}=\frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_n}{\boldsymbol{v}_n\cdot\boldsymbol{v}_n}\boldsymbol{v}_n,$$

da cui, passando alle norme e sviluppando, si ottiene la **formula della distanza di un punto** $P_0=(x_0,y_0)$ **dalla retta** r di equazione $ax+by+c=0$

$$d(P_0,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

6 Geometria analitica in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

Sia fissato in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ un riferimento cartesiano $[O,\mathscr{B}=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})]$ con base $\mathscr{B}$ ortonormale.

La **distanza tra due punti** $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ è

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

6.1 Angolo e ortogonalità fra rette

Consideriamo le rette r ed r' di parametri direttori rispettivamente (l,m,n) e (l',m',n'). Allora l'**angolo tra le due rette** è determinato da:

$$\cos\widehat{rr'}=\pm\frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.$$

La **condizione di ortogonalità**:

$$r\perp r' \quad\Longleftrightarrow\quad ll'+mm'+nn'=0.$$

6.2 Ortogonalità tra retta e piano

Sia $\alpha=[P,V_2]$ un piano di equazione $ax+by+cz+d=0$ e sia $r=[Q,V_1]$ una retta di parametri direttori (l,m,n).

Per definizione r è perpendicolare ad α se e solo se $V_1^\perp = V_2$. Imponiamo analiticamente questa condizione. Poiché

$$V_2 = \{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \ : \ ax + by + cz = 0\} \qquad \text{e} \qquad V_1 = < l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} >,$$

allora

$$V_1^\perp = \{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \ : \ lx + my + nz = 0\}.$$

$V_1^\perp = V_2$ se e solo se le due equazioni $ax + by + cz = 0$ e $lx + my + nz = 0$ hanno le stesse soluzioni cioè se il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ lx + my + nz = 0 \end{cases}$$

ha rango 1. Dunque α è perpendicolare a r se e solo se

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{bmatrix} = 1,$$

cioè se e solo se esiste un numero reale non nullo ρ tale che

$$l = \rho a, \qquad m = \rho b, \qquad n = \rho c.$$

In conclusione, una retta è ortogonale ad un piano se i parametri direttori della retta sono proporzionali ai coefficienti a, b, c dell'equazione cartesiana del piano.
Dato ora un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e un piano $\alpha \ : \ ax + by + cz + d = 0$, possiamo subito determinare la **retta passante per** P **e ortogonale ad** α, che è data, in forma parametrica, dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} .$$

Dato il punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e una retta di parametri direttori (l, m, n), il **piano passante per** P **e ortogonale a** r ha equazione

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0.$$

Osserviamo che nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ di un piano α i coefficienti a, b, c sono proporzionali ai parametri direttori di una retta normale ad α.

6.3 Angolo fra due piani

Dati due piani

$$\alpha \ : \ ax + by + cz + d = 0 \qquad \alpha' \ : \ a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

abbiamo visto che l'angolo tra essi è uguale a quello che si forma tra due normali n ed n' rispettivamente ad α ed α':

$$\cos \widehat{\alpha\alpha'} = \cos \widehat{nn'}.$$

I parametri direttori delle due normali sono

$$(a, b, c) \text{ per } n, \qquad (a', b', c') \text{ per } n',$$

per cui

$$\cos \widehat{\alpha\alpha'} = \cos \widehat{nn'} = \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

In particolare la **condizione di ortogonalità tra piani** è

$$\alpha \perp \alpha' \iff aa' + bb' + cc' = 0.$$

6.4 Coseni direttori di una retta

Data una retta $r = [P, V_1]$, i coseni direttori di r sono anche nel caso tridimensionale, come nel piano, le componenti rispetto alla base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ dei versori di V_1.

Se (l, m, n) sono i parametri direttori di

$$\boldsymbol{u}_r = \pm \frac{l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

allora

$$u_x = \pm \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \qquad u_y = \pm \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \qquad u_z = \pm \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Inoltre

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1,$$

$$\cos \widehat{rx} = u_x, \qquad \cos \widehat{ry} = u_y, \qquad \cos \widehat{rz} = u_z.$$

6.5 Equazione normale del piano

Dato il piano $\alpha\ :\ ax + by + cz + d = 0$, consideriamo le seguente equazione di α:

$$\pm\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

In essa i coefficienti di x, y, z sono i coseni direttori di una retta normale al piano. Questa equazione si chiama allora **equazione normale** del piano α.

6.6 Distanza punto-piano

Siano $\alpha\ :\ ax + by + cz + d = 0$ un piano e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto. Detta n la retta passante per P_0 e ortogonale al piano α, sia H il punto di intersezione di α con n. Sia P il generico punto di α, allora $\overrightarrow{P_0H}$ è la proiezione ortogonale di $\overrightarrow{P_0P}$ su n. Analogamente a quanto fatto in dimensione 2 per la distanza punto-retta, si ottiene la **formula della distanza punto-piano**

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

6.7 Distanza punto-retta

Si procede analiticamente ripercorrendo i passi della definizione sintetica della distanza di un punto da una retta.

Esempio 5.28. *Determinare la distanza del punto $P = (0, 1, 0)$ dalla retta r di equazione*

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}.$$

I parametri direttori sono $(1, -1, -1)$. Poiché P non soddisfa le equazioni di r, la distanza $d(P, r) > 0$.
Troviamo l'equazione del piano α passante per P e ortogonale ad r.
Il generico piano passante per P ha equazione

$$a(x - 0) + b(y - 1) + c(z - 0) = 0.$$

Imponendo l'ortogonalità di α ed r, si ha $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, quindi

$$\alpha\ :\ x - y + z + 1 = 0.$$

Attraverso il sistema

$$\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x=1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases},$$

che ha soluzione

$$\begin{cases} t=0 \\ x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases},$$

otteniamo le coordinate $(1,2,0)$ *di* $H=\alpha\cap r$. *Infine la distanza*

$$d(P,r)=d(P,H)=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{2}.$$

6.8 Minima distanza fra due rette sghembe

Date due rette sghembe r ed s, abbiamo dimostrato che esiste ed è unica la retta t ortogonale ad entrambe ed incidente ad esse ((si veda la Proposizione (5.21))). Abbiamo poi provato che è proprio lungo tale retta che si realizza la minima distanza tra r ed s, nel senso che, detti

$$R:=\ t\cap r,\qquad S:=t\cap s,$$

risulta

$$d_{\min}(r,s)=d(R,S).$$

Affrontiamo ora con un esercizio il problema di determinare tale retta t, date r ed s sghembe e di calcolare la distanza $d_{\min}(r,s)$.

Esercizio 5.29. Date in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ le due rette

$$r:\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases},\qquad s:\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-z=0 \end{cases},$$

dopo aver verificato che sono sghembe, determinare la retta t ortogonale e incidente ad entrambe e calcolare $d_{\min}(r,s)$.

Le due rette sono sghembe poiché risulta

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\neq 0.$$

Scriviamo le equazioni parametriche delle due rette:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x = t' \\ y = 1 - t' \\ z = t' \end{cases}.$$

Dunque i punti variabili su r ed s sono rispettivamente

$$R(t) = (t, 0, 0) \qquad S(t') = (t', 1 - t', t')$$

e il vettore corrispondente avrà componenti

$$\overrightarrow{SR} = (t - t', t' - 1, -t').$$

Dobbiamo ora imporre che $\overrightarrow{SR}$ sia ortogonale sia ad r che ad s per ottenere la retta t come congiungente i punti R ed S:

$$\overrightarrow{SR} \perp r \ : \ t - t' = 0 \qquad \overrightarrow{SR} \perp s \ : \ t - t' + 1 - t' - t' = 0.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} t - t' = 0 \\ t - t' + 1 - t' - t' = 0 \end{cases},$$

si ottiene $t = 1/2 = t'$. Per cui

$$R = (1/2, 0, 0), \qquad S = (1/2, 1/2, 1/2) \qquad \overrightarrow{RS} \in < (0, 1, 1) > .$$

Siamo pronti per concludere l'esercizio scrivendo le equazioni della retta $t = \mathrm{rt}(R, S)$:

$$\begin{cases} x = 1/2 \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \qquad \textit{oppure} \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

e la distanza cercata

$$d_{\min}(r, s) = d(R, S) = \sqrt{1/4 + 1/4} = \sqrt{2}/2.$$

6.9 Sfere e circonferenze nello spazio

Definizione 5.30. *Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ una* sfera *è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso (detto* centro *della sfera). Chiamiamo* raggio *la distanza di un generico punto della sfera dal suo centro.*

Consideriamo $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ un punto di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ ed R un numero reale positivo. Sia $P = (x, y, z) \in \mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ tale che $d(P, C) = R$. Otteniamo:

$$\Sigma : \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2 .$$

Pertanto l'equazione della sfera è data da

$$\Sigma : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = 0 .$$

Possiamo osservare che, analogamente a quanto accade per una circonferenza nel piano euclideo $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, una sfera nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ è rappresentata da un'equazione di secondo grado priva dei termini rettangolari e in cui i coefficienti di x^2, y^2 e z^2 sono uguali.

Viceversa, un'equazione che abbia le proprietà di quella della sfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 .$$

Con alcuni passaggi algebrici può essere riscritta nella forma:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d .$$

A questo punto distinguiamo tre casi.

Caso 1. Se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$ l'equazione data rappresenta una sfera con centro

$$C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}) ,$$

e raggio

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}} .$$

Caso 2. Se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$ abbiamo una *sfera di raggio nullo*. In tal caso l'unico punto reale della sfera è il centro stesso $C = (-a/2, -b/2, -c/2)$.

Caso 3. Se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$ l'equazione rappresenta l'insieme vuoto in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, o, in altre parole, un luogo Q che non possiede punti reali.

Definizione 5.31. *Una* circonferenza *in* $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ *è l'intersezione di un piano con una sfera (quando tale intersezione non sia vuota).*

Osserviamo subito che, in base a tale definizione, una circonferenza nello spazio si ottiene secando una sfera con un piano che abbia distanza dal centro della sfera minore o uguale al raggio della sfera; essa possiede un solo punto reale se tale distanza coincide con il raggio.

Esercizio 5.32. *Dato un fascio $\mathcal{F}$ di piani paralleli al piano*

$$\pi : \quad x + y + z = 0 ,$$

determinare le equazioni cartesiane dei piani del fascio tangenti alla sfera di equazione

$$S : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 12 = 0 .$$

Soluzione. S è una sfera avente centro in $C = (3, 2, 0)$ e raggio $R = 1$. I piani richiesti sono quelli a distanza 1 da C. Un generico piano del fascio $\mathcal{F}$ risulta essere

$$\pi_k : \quad x + y + z + k = 0 .$$

Imponiamo $d(\pi_k, C) = 1$. Otteniamo

$$\frac{|k+5|}{\sqrt{3}} = 1 ,$$

da cui abbiamo due valori di k, ossia i due piani richiesti. ♣

Esercizio 5.33. *Scrivere le equazioni di tutte le sfere di raggio $R = 3$ che risultano essere tangenti al piano π di equazione $x = 0$ e passanti per i punti $A = (1, 0, 0)$ e $B = (2, 2, 2)$.*

Soluzione. Sia $C = (x_0, y_0, z_0)$ il generico centro di una di queste sfere. Imponendo che $d(C, \pi) = 3$ otteniamo $|x_0| = 3$. Sfruttando ora il passaggio per i punti A e B, giungiamo al sistema

$$\begin{cases} |x_0| = 3 , \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9 , \\ (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 2)^2 + (z_0 - 2)^2 = 9 , \end{cases}$$

che è equivalente all'unione dei due sistemi (ponendo $x = x_0$, $y = y_0$ e $z = z_0$)

$$\begin{cases} x = 3\,, \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9\,, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3\,, \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9\,, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9\,. \end{cases}$$

Ognuno di questi sistemi rappresenta l'intersezione di un piano (prima equazione) con una circonferenza $\mathscr{C}$ (seconda e terza equazione). Dunque se la circonferenza $\mathscr{C}$ non giace nel piano $x = \pm 3$ ci aspettiamo due punti in comune per ciascuno dei due sistemi. Procedendo con i calcoli si ottengono effettivamente quattro punti corrispondenti ai centri delle sfere richieste. ♣

Esercizio 5.34. *Si consideri la circonferenza*

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4\,, \\ x = y - z\,, \end{cases}$$

e se ne determinino centro e raggio.

Soluzione. Poniamo

$$S: \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4\,,$$

$$\pi: \quad x - y + z = 0\,.$$

Notiamo che S è una sfera di centro $C = (1, 1, -1)$ e raggio $R = 2$. L'intersezione del piano π con la sfera S è una circonferenza poichè risulta $d(C, \pi) = 1/\sqrt{3} < 2$. Per determinarne il centro H dobbiamo intersecare il piano π con la retta s passante per C ed ortogonale a π.

$$s: \begin{cases} x = 1 + t\,, \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t\,. \end{cases}$$

Segue che

$$H: \begin{cases} x = 1 + t\,, \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t\,, \\ x - y + z = 0\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo $H = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Il raggio della circonferenza risulta essere

$$\rho = \sqrt{R^2 - d(C, H)^2} = \sqrt{\frac{11}{3}}\,.$$

♣

Esercizio 5.35. *Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza di centro $C = (1, 1, 0)$ e tangente alla retta di equazione*

$$r : \begin{cases} x = t\,, \\ y = 2t \\ z = -t\,. \end{cases}$$

Soluzione. Come abbiamo visto, una circonferenza deve essere sempre ottenuta come sezione di una sfera S con un piano α. La circoneferenza deve appartenere al piano α che contiene il suo centro C e la retta r. Il raggio della circonferenza sarà $d(C, r)$. Consideriamo il fascio $\mathcal{F}_r$ di piani pasanti per la retta r:

$$\mathcal{F}_r : \quad (2x - y) + k(x + z) = 0\,.$$

Imponendo il passaggio di un generico piano $\alpha \in \mathcal{F}_r$ per il punto C si ottiene

$$\alpha : \quad x - y - z = 0\,.$$

Determiniamo ora la sfera S di centro C e raggio $d(C, r)$. Per fare ciò, individuiamo il piano passante per C ed ortogonale alla retta r; poi determiniamo il punto H dato dall'intersezione della retta r con il piano appena trovato; infine $d(C, H)$ è il raggio di S. Per concludere basta intersecare S con il piano α. ♣

Esercizio 5.36. *Si considerino le sfere*

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, \qquad S_2 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = hy\,.$$

Determinare il parametro $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ in modo tale che $S_1 \cap S_2$ sia una circonferenza di raggio $R = 3$.

Soluzione. Otteniamo

$$S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, \\ hy = 25\,. \end{cases}$$

La sfera S_1 ha centro $C_1 = (0, 0, 0)$ e raggio $R_1 = 5$. Sia H il centro della circonferenza richiesta. Affinchè $S_1 \cap S_2$ sia una circonferenza di raggio pari a 3 si deve avere, per il Teorema di Pitagora, che $d(C_1, H) = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Imponiamo ora che C_1 abbia distanza 4 dal piano $hy = 25$. Sviluppando i calcoli, si ha $h = \pm\frac{25}{4}$. ♣

Esercizio 5.37. *Siano*

$$Q: \quad 5y^2 + z^2 - 2z = 0\,, \qquad \alpha: \quad x - 2y = 0\,.$$

Riconoscere che il luogo $\mathscr{C}$ *dei punti di* $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ *le cui coordinate sono soluzioni del sistema*

$$Q \cap \alpha : \begin{cases} 5y^2 + z^2 - 2z + 1 = 1\,, \\ x - 2y = 0\,, \end{cases}$$

è una circonferenza e se ne determinino il centro ed il raggio.

Soluzione. Il sistema $Q \cap \alpha$ equivale al sistema

$$\begin{cases} 5y^2 + z^2 - 2z + 1 = 1\,, \\ x = 2y\,, \end{cases}$$

ovvero a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\,, \\ x = 2y\,. \end{cases}$$

L'ultimo sistema rappresenta quindi lo stesso insieme di punti ma ora la prima equazione rappresenta una sfera S di centro $D = (0,0,1)$ e raggio $R = 1$ e la seconda equazione è quella di un piano. Questo prova che $\mathscr{C}$ può essere una circonferenza (occorre verificare che $d(D,\alpha) \leq R$). In effetti il piano $\alpha:\ x - 2y = 0$ passa per il centro della sfera D, quindi $\mathscr{C}$ è proprio una circonferenza, anzi è una *circonferenza massima* per la sfera, tale cioè per cui il centro e il raggio della circonferenza coincidono con quelli della sfera (dunque di raggio massimo fra tutte le circonferenze che si ottengono sezionando la sfera S con piani). ♣

Capitolo 6

Ampliamenti del piano affine reale

Il nostro prossimo oggetto di studio saranno le **curve algebriche reali** di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ ovvero quegli insiemi dei punti dei piano affine reale le cui coordinate annullano equazioni del tipo

$$F(x, y) = 0,$$

con F polinomio di grado positivo nelle indeterminate x ed y a coefficienti reali. Affinchè lo studio delle curve sia il più omogeneo possibile dobbiamo ampliare il piano affine in due modi:

- allargare l'insieme dei punti e delle rette di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ con i cosiddetti elementi impropri, effettuando l'*ampliamento proiettivo* di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ (tale procedimento si può applicare partendo da un qualunque piano affine, indipendentemente dalla scelta del campo $\mathbb{K}$ che definisce il piano vettoriale corrispondente, dunque lo svilupperemo a partire da un piano affine su un campo qualsiasi);

- considerare anche i punti a coordinate complesse, cioè effettuare la *complessificazione* di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$.

1 Ampliamento proiettivo di un piano affine

Definizione 6.1. *Dato un piano affine $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ associato allo spazio vettoriale $V_2(\mathbb{K})$ su un campo $\mathbb{K}$, consideriamo la seguente struttura geometrica definendone i punti e le rette:*

- *sia $\mathscr{P}$ l'insieme dei punti, costituito*

  - *dall'insieme* $\mathscr{A}$ *di tutti i punti di* $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ *(detti* ***punti propri****) unito*
  - *all'insieme* $\mathscr{A}_\infty$ *dei sottospazi vettoriali di dimensione* 1 *dello spazio vettoriale* $V_2(\mathbb{K})$ *associato ad* $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ *(detti* ***punti impropri****);*
- *sia* $\mathscr{R}$ *l'insieme delle rette, costituito*
  - *dall'insieme di tutte le rette di* $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$*, ciascuna ampliata con il corrispondente punto improprio (dette* ***rette proprie****) unitamente a*
  - *una nuova retta, la retta* r_∞ *costituita da tutti i punti impropri (detta* ***retta impropria****).*

Chiameremo la coppia $(\mathscr{P}, \mathscr{R})$ ***piano proiettivo*** *ottenuto come* ***ampliamento proiettivo del piano affine*** $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$*, in simboli* $\mathbb{P}_2(V)$*.*

Proposizione 6.2. *In* $\mathbb{P}_2(V)$ *valgono le seguenti proprietà:*

(a) per due punti distinti passa una e una sola retta;

(b) due rette distinte hanno esattamente un punto in comune.

Dimostrazione.

(a) siano P e Q due punti distinti di $\mathbb{P}_2(V)$. Distinguiamo tre casi.
Se P e Q sono impropri, allora $P, Q \in r_\infty$;
Se P e Q sono entrambi punti propri allora $P, Q \in$
$A_2(\mathscr{A}, V)$. Sia r la retta di $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ da essi individuata:

$$r = [P, V_1], \quad \text{dove} \qquad V_1 = <\overrightarrow{PQ}> .$$

Ad r corrisponde in $\mathbb{P}_2(V)$ la retta ampliata

$$\widetilde{r} = r \cup \{V_1\},$$

cui appartengono P e Q.
Se il punto P è proprio e il punto $Q = V_1$ è improprio, allora consideriamo in $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ la retta $r = [P, V_1]$ ed estendiamola a $\widetilde{r} = r \cup \{V_1\}$. Allora $P, Q \in \widetilde{r}$.

(b) siano $\widetilde{r}$ ed $\widetilde{s}$ due rette distinte. Distinguiamo due casi.

Se $\widetilde{r}, \widetilde{s}$ sono rette proprie allora ponendo

$$\widetilde{r} = [P, V_1] \cup \{V_1\} \qquad\qquad \widetilde{s} = [Q, W_1] \cup \{W_1\},$$

si ha:

se $V_1 \neq W_1$ allora $\widetilde{r} \cap \widetilde{s} = [P, V_1] \cap [Q, W_1]$, che è un punto proprio, se $V_1 = W_1$ allora $\widetilde{r} \cap \widetilde{s} = \{V_1\}$, che è un punto improprio (le due rette sono parallele in $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$), Se la retta $\widetilde{r} = [P, V_1] \cup \{V_1\}$ è propria e la retta $\widetilde{s} = r_\infty$ è la retta impropria allora $\widetilde{r} \cap r_\infty = \{V_1\}$.

□

2 Coordinatizzazione di $\mathbb{P}_2(V)$

Vogliamo associare ai punti di $\mathbb{P}_2(V)$ delle coordinate. Partiamo dalla seguente osservazione:

Nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^3$ consideriamo la relazione p di **proporzionalità** definita sui vettori di $(\mathbb{K}^3)^*$:

$$\forall\, \boldsymbol{v} = (x_1, x_2, x_3), \quad \boldsymbol{w} = (y_1, y_2, y_3) \quad \in (\mathbb{K}^3)^*$$

$$\boldsymbol{v}\ \mathsf{p}\ \boldsymbol{w}\ :\Longleftrightarrow <\boldsymbol{v}>=<\boldsymbol{w}>,$$

il che si verifica se e solo se esiste $k \in \mathbb{K}^*$ tale che

$$y_1 = kx_1, \qquad y_2 = kx_2, \qquad y_3 = kx_3.$$

Si prova immediatamente che la relazione p è una relazione di equivalenza su $(\mathbb{K}^3)^*$. Consideriamo allora l'insieme quoziente

$$(\mathbb{K}^3)^*/\mathsf{p}\ := \{[(x_1, x_2, x_3)]_{\mathsf{p}}\ :\ (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{K}^3)^*\} =: (\mathbb{K}^3)^*/\mathbb{K}^*,$$

dove

$$[(x_1, x_2, x_3)]_{\mathsf{p}} := \{(y_1, y_2, y_3) \in (\mathbb{K}^3)^*\ :\ (y_1, y_2, y_3) = k(x_1, x_2, x_3),\ k \in \mathbb{K}^*\}.$$

$(\mathbb{K}^3)^*/\mathbb{K}^*$ sarà proprio l'insieme che coordinatizza l'insieme dei punti di $\mathbb{P}_2(V)$.
In $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ si fissi un riferimento affine, cosicchè $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ si identifichi ora con il piano affine numerico $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ e ad ogni punto P corrispondano le coordinate affini $P = (x, y)$. Ora passiamo all'insieme dei punti di $\mathbb{P}_2(V)$, cioè $\mathscr{P} = \mathscr{A} \cup \mathscr{A}_\infty$. Consideriamo la funzione

$$\widetilde{\varphi} : \begin{cases} \mathscr{P} \longrightarrow & (\mathbb{K}^3)^*/\mathbb{K}^* \\ P \longmapsto & \begin{cases} [(x,y,1)], & \text{se } P \in \mathscr{A} \text{ e ha coordinate affini } (x,y) \\ [(l,m,0)], & \text{se } P \in \mathscr{A}_\infty \text{ e } P =< (l,m) > \end{cases} \end{cases}$$

La funzione $\widetilde{\varphi}$ è una bijezione che quindi permette di identificare ciascun punto di $\mathscr{P}$ con una classe di proporzionalità di terne $[(x_1, x_2, x_3)]_{\mathsf{p}}$: chiameremo gli elementi di $(\mathbb{K}^3)^*/\mathbb{K}^*$ **coordinate proiettive omogenee** dei punti di $\mathbb{P}_2(V)$.
In tal modo abbiamo ottenuto una rappresentazione analitica dell'ampliamento proiettivo di $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$, che indicheremo d'ora in poi con $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}) := (\mathbb{K}^3)^*/\mathbb{K}^*$, e chiameremo **piano proiettivo numerico sul campo** $\mathbb{K}$ (indicato anche $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$ o, se $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, $\mathrm{PG}(2, \mathrm{q})$, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{KP}^2$).
Risulta evidente che ad un cambiamento di riferimento affine in $\mathbb{A}_2(\mathscr{A}, V)$ corrisponde una diversa rappresentazione analitica di $\mathbb{P}_2(V)$, cioè una diversa funzione $\widetilde{\varphi}$ che determina una diversa corrispondenza tra $\mathbb{P}_2(V)$ e $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$. Si può provare che il legame tra la coordinate proiettive omogenee dei punti nelle due diverse rappresentazioni del piano proiettivo coincide semplicemente con un cambiamento di base nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^3$, ed è quindi espresso da una relazione del tipo

$$\rho \boldsymbol{x}' = M^{-1} \boldsymbol{x}$$

dove $M \in GL_3(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}'$ denotano rispettivamente le componenti rispetto alle due basi considerate in $\mathbb{K}^3$ di un vettore rappresentativo delle coordinate proiettive omogenee di un punto generico di $\mathbb{P}_2(V)$, e ρ è un fattore di proporzionalità non nullo di $\mathbb{K}$.

3 Rappresentazione delle rette di $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$

Le rette di $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ sono la retta impropria e le rette di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ ampliate con l'aggiunta del loro punto improprio. Vogliamo trovarne le equazioni.

Partiamo dalle rette proprie.Una retta r di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ ha equazione

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{con} \qquad (a,b) \neq (0,0).$$

Se il punto $P = (x', y') \in r$ allora

$$ax' + by' + c = 0.$$

Se ora nel piano proiettivo $P = [(x'_1, x'_2, x'_3)]$, il legame fra le coordinate affini e proiettive di P è dato da:

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3}, \qquad y' = \frac{x'_2}{x'_3}.$$

Osserviamo che $x'_3 \neq 0$ perché il punto P è proprio.
Quindi

$$a\frac{x'_1}{x'_3} + b\frac{x'_2}{x'_3} + c = 0, \qquad \text{cioè} \qquad ax'_1 + bx'_2 + cx'_3 = 0.$$

Le coordinate proiettive del punto proprio P della retta r soddisfano dunque l'equazione lineare omogenea nelle variabili x_1, x_2, x_3:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Se questa equazione è verificata anche dalle coordinate proiettive del punto improprio di $\widetilde{r}$, allora questa è l'equazione di $\widetilde{r}$.
Il punto improprio della retta ampliata $\widetilde{r}$ ha coordinate $[(-b, a, 0)]$, quindi

$$a \cdot b + b \cdot (-a) + c \cdot 0.$$

Per cui ogni retta propria di $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ ha equazione

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \qquad \text{con} \qquad (a,b) \neq (0,0).$$

L'equazione della retta impropria è

$$x_3 = 0,$$

poiché essa è individuata dalla proprietà caratteristica dei punti impropri di avere la terza coordinata nulla. Dunque **tutte le rette di $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ sono rappresentate da un'equazione lineare omogenea nelle variabili** x_1, x_2, x_3

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \qquad \text{con} \qquad (a,b,c) \neq (0,0,0).$$

Se $(a, b) \neq (0, 0)$ si hanno le rette proprie,
se $(a, b) = (0, 0)$ si ottiene la retta impropria.

Osservazione 6.3. *Esiste anche la* ***rappresentazione parametrica proiettiva di una retta****. Dati due punti distinti*

$$A = [(a_1, a_2, a_3)], \qquad B = [(b_1, b_2, b_3)],$$

la retta passante per A e B ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda, \mu) \neq (0, 0),$$

cioè la combinazione lineare delle coordinate proiettive dei due punti dati.

Esempio 6.4. *In $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, scrivere l'equazione cartesiana della retta passante per i punti*

$$P = [(1, 0, 1)] \qquad e \qquad Q = [(3, 0, 2)].$$

I punti P e Q sono punti propri e sono distinti. Le loro coordinate affini sono

$$P = (1, 0), \qquad Q = (3/2, 0).$$

La retta di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ è quindi $r\ :\ y = 0$, per cui

$$\widetilde{r}\ :\ \frac{x_2}{x_3} = 0 \qquad cioè \qquad x_2 = 0.$$

Esempio 6.5. *In $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, scrivere l'equazione cartesiana della retta passante per i punti*

$$P = [(1, 0, 1)] \qquad e \qquad Q = [(3, 0, 0)].$$

Il punto P è proprio, mentre Q è un punto improprio.
La retta di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ passante per $P = (1, 0)$ e avente parametri direttori $(1, 0)$ ha equazione

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \end{cases},$$

da cui l'equazione cartesiana

$$y = 0 \qquad quindi \qquad x_2 = 0.$$

Esempio 6.6. *In $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, scrivere l'equazione cartesiana della retta passante per i punti*

$$P = [(1,0,0)] \qquad e \qquad Q = [(3,1,0)].$$

I punti P e Q sono impropri, per cui la retta che li contiene è la retta impropria, di equazione

$$x_3 = 0.$$

Se $\mathscr{C}$ è una curva di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ la sua chiusura proiettiva $\overline{\mathscr{C}}$ si ottiene sostituendo nell'equazione di $\mathscr{C}$ le coordinate proiettive dei punti.

Esempio 6.7. *Sia ad esempio*

$$\mathscr{C} \;:\; x^2 + 3y^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + 3\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 - 2\frac{x_1}{x_3} + 1 = 0$$
$$\widetilde{\mathscr{C}} \;:\; x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 = 0$$

La curva $\widetilde{\mathscr{C}}$ ha tutti i punti (propri) di $\mathscr{C}$ e ha in più dei punti impropri. In generale studieremo $\mathscr{C}$ tramite $\widetilde{\mathscr{C}}$.

3.1 Fasci di rette nel piano proiettivo

Quando abbiamo introdotto i fasci di rette in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ nel paragrafo 4.6 del Capitolo 2, abbiamo distinto il caso in cui le due rette generatrici siano incidenti da quello in cui siano parallele. Se ora pensiamo di immergere il piano affine nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ questa distinzione perde di significato perché, come ben sappiamo, nel piano proiettivo due rette distinte hanno sempre esattamente un punto in comune. Dato dunque un fascio di rette

$$\mathscr{F} :\; \lambda(a_0x + b_0y + c_0) + \mu(a_1x + b_1y + c_1) = 0, \qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

possiamo passare alle coordinate proiettive omogenee $[(x_1, x_2, x_3)]$ e ottenere l'equazione di un fascio di rette nel piano proiettivo su $\mathbb{K}$:

$$\mathscr{F} :\; \lambda(a_0x_1 + b_0x_2 + c_0x_3) + \mu(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3) = 0, \qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Le due rette generatrici hanno sempre un punto in comune, quando tale punto è un punto proprio otteniamo dal punto di vista affine un fascio proprio di rette, quando il punto è un punto improprio otteniamo nel piano affine un fascio improprio di rette.

Si noti che nel paragrafo 4.6 avevamo osservato che nel caso in cui le due generatrici siano parallele non tutte le possibili scelte della coppia (λ, μ) producono delle rette del piano affine: alcune delle equazioni che si ottengono non sono soddisfatte da nessun punto di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$. Passando alle coordinate proiettive anche questa asimmetria viene sanata: per tali scelte dei parametri l'equazione del fascio diventa

$$(\lambda c_0 + \mu c_1)x_3 = 0, \qquad \lambda c_0 + \mu c_1 \neq 0,$$

pertanto nel piano proiettivo è verificata da tutti i punti della retta impropria $x_3 = 0$ (come era ragionevole aspettarsi visto che un fascio improprio di rette dal punto di vista proiettivo è sempicemente l'insieme di tutte le rette che passano per un punto improprio, e la retta impropria gode di questa proprietà). Dunque per tutte le scelte di (λ, μ) non contemporaneamente nulli l'equazione del fascio rappresenta una retta di $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$.

4 Ampliamento complesso

Richiamiamo alcune proprietà del coniugio nel campo complesso:

$$\overline{} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = a + ib & \longmapsto & \overline{z} = a - ib \end{cases}$$

L'applicazione "$\overline{}$" è una biiezione, è involutoria e conserva somma e prodotto, cioè per ogni $z, t \in \mathbb{C}$:

$$\overline{z + t} = \overline{z} + \overline{t}$$

$$\overline{zt} = \overline{z}\overline{t}.$$

Infine per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ha

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Il **coniugio** è dunque un automorfismo involutorio del campo complesso che fissa ogni numero reale.

Definizione 6.8. *Se $f(x_1, \dots, x_n)$ è un polinomio a coefficienti complessi, il **polinomio coniugato** si ottiene passando al coniugio tutti i suoi coefficienti.*

Osservazione 6.9. *Poichè il coniugio è un automorfismo di $\mathbb{C}$, si verifica subito che, se $(z_1, \dots, z_n)$ è radice del polinomio $f(x_1, \dots, x_n)$ allora $(\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n})$ è radice del polinomio coniugato.*

Osservazione 6.10. *Dalla definizione precedente e dal fatto che il coniugio in $\mathbb{C}$ fissa tutti e soli i numeri reali, segue che il polinomio f è uguale al suo coniugato $\overline{f}$ se e solo se i suoi coefficienti sono tutti reali (a meno di un coefficiente di proporzionalità complesso).*

Quindi se f è un polinomio a coefficienti reali e $(z_1, \dots, z_n)$ è una sua radice complessa, allora anche $(\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n})$ è una sua radice.

Poniamoci ora in $P_2(\mathbb{C})$; poiché $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, abbiamo le seguenti inclusioni

$$\mathbb{A}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{C}).$$

Vorremmo ritrovare in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ quei punti che sono anche punti di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ e di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. In $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ad ogni punto è associata una terna $[(x_1, x_2, x_3)]_{\mathsf{p}}$ con $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{C}^3)^*$, ad ogni retta l'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con $(a, b, c) \in (\mathbb{C}^3)^*$ e definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Definizione 6.11. *Un punto $P \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ si dice **reale** se nella classe di proporzionalità di coordinate che lo rappresenta esiste almeno una terna (x_1, x_2, x_3) formata da numeri reali. Si definisce **immaginario** altrimenti.*

Definizione 6.12. *Una retta $r \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ si dice **reale** se nella classe di proporzionalità di terne di coefficienti (a, b, c) che la rappresenta ne esiste almeno una reale. Si definisce **immaginaria** altrimenti.*

Se $P = [(x_1, x_2, x_3)]$ è un punto di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, il **punto coniugato** è $\overline{P} = [(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})]$.
Se $r\ :\ ax_1+bx_2+cx_3 = 0$ è una retta di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, la retta coniugata è $\overline{r}\ :\ \overline{a}x_1+\overline{b}x_2+\overline{c}x_3 = 0$ e contiene tutti e soli i punti coniugati dei punti di r.

Proposizione 6.13. *In $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ valgono le seguenti proprietà:*

(a) un punto P è reale se e solo se $P = \overline{P}$;

(b) una retta r è reale se e solo se $r = \overline{r}$;

(c) una retta r immaginaria contiene uno ed un solo punto reale, che è l'intersezione di r con la sua coniugata;

(d) la retta che congiunge due punti immaginari e coniugati è reale.

Dimostrazione.

(a) Sia $P = [(x_1, x_2, x_3)]$ con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Allora $x_i = \overline{x_i}$ per $i = 1, 2, 3$, quindi $P = \overline{P}$.

Viceversa se $P = [(x_1, x_2, x_3)]$ con, ad esempio, $x_1 \neq 0$. Supponiamo che $P = \overline{P}$. Si ha

$$P = \left[\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)\right] \qquad \overline{P} = \left[\left(1, \overline{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}, \overline{\left(\frac{x_3}{x_1}\right)}\right)\right],$$

per cui

$$\frac{x_2}{x_1} = \overline{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \qquad \text{e} \qquad \frac{x_3}{x_1} = \overline{\left(\frac{x_3}{x_1}\right)}.$$

Quindi $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \in \mathbb{R}$, perciò P è reale.

(b) La dimostrazione è analoga.

(c) Sia r una retta immaginaria. Allora $r \neq \overline{r}$. Quindi, se $P = r \cap \overline{r}$, allora, a norma dell'Osservazione (6.9), risulta:

$$\overline{P} = \overline{(r \cap \overline{r})} = \overline{r} \cap r = P,$$

quindi P è reale.

Se poi la retta r contenesse un altro punto reale P', distinto da P, poichè nel piano proiettivo reale (come anche in quello complesso che lo contiene) per due punti distinti passa una e una sola retta (reale), tale sarebbe la retta $\mathrm{rt}(P, P') = r$

(d) Siano P e $\overline{P}$ due punti immaginari e coniugati. Per ipotesi $P \neq \overline{P}$. Se r è la retta $\mathrm{rt}(P, \overline{P})$, allora, sempre per l'Osservazione (6.9), $\overline{r} = \mathrm{rt}(\overline{P}, \overline{\overline{P}}) = \mathrm{rt}(\overline{P}, P) = r$. Anche in questo caso, l'unicità della retta reale per P segue dal fatto che due rette reali hanno in comune un punto reale nel piano proiettivo reale e dunque anche nel piano complesso.

$\square$

Capitolo 7

Curve algebriche reali di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

Definizione 7.1. *Una* ***curva algebrica reale*** *del piano proiettivo complesso $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ è una classe di proporzionalità di polinomi omogenei di $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. Se $F(x_1, x_2, x_3)$ è un rappresentante della curva, l'equazione*

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

si dice **equazione della curva**. *Il sottoinsieme $\mathscr{C}$ di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ costituito dai punti le cui coordinate proiettive omogenee soddisfano l'equazione della curva viene detto il* **supporto della curva**.

Per semplicità, si denoterà una curva algebrica con il simbolo $\mathscr{C}$ che indica il suo supporto, talvolta identificandola con esso.

Definizione 7.2. *La curva $\mathscr{C}$ si dice* ***riducibile*** *se il polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$ è fattorizzabile in un prodotto di polinomi, cioè :*

$$F(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1, x_2, x_3)^{t_1} \dots F_h(x_1, x_2, x_3)^{t_h}.$$

Si hanno dunque h curve $\mathscr{C}_1, \dots, \mathscr{C}_h$, definite dalle equazioni

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \dots, F_h(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

contate $t_1, \dots, t_h$ volte, rispettivamente.
Le curve $\mathscr{C}_1, \dots, \mathscr{C}_h$ si dicono le ***componenti*** *della curva $\mathscr{C}$.*

Osservazione 7.3. *Poiché il polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$ è omogeneo, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha*

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^n F(x_1, x_2, x_3),$$

*dove n è il grado di F, detto **ordine della curva algebrica**.*

- *Se $n = 1$, allora $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ è del tipo*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

  cioè una retta reale,

- *se $n = 2$, allora $F(x_1, x_2, x_3)$ è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle indeterminate x_1, x_2, x_3, cioè una forma quadratica a coefficienti reali. $\mathscr{C}$ si dice allora **conica**,*

- *se $n = 3$, si ha una **cubica**,*

- *se $n = 4$, si ha una **quartica**,*

e così via...

1 Intersezioni di una curva con una retta

Siano r una retta di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ di equazione $ax_1+bx_2+cx_3 = 0$ e $\mathscr{C}$ una curva algebrica reale definita da $F(x_1, x_2, x_3) = 0$. Le intersezioni tra r e $\mathscr{C}$ sono date dal sistema

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \end{cases},$$

la cui equazione risolvente avrà grado n e, nel campo complesso, avrà n soluzioni, contate con la dovuta molteplicità: ciascuna di tali soluzioni determina un punto P di intersezione, contato con la corrispondente molteplicità, che viene detta la *molteplicità d'intersezione in P di $\mathscr{C}$ con r*. Si conviene di porre tale molteplicità uguale a 0 per ogni punto $Q \in r \setminus \mathscr{C}$ e ∞ per ogni punto di r nel caso si abbia $r \subset \mathscr{C}$.

Teorema 7.4. *L'ordine di una curva algebrica reale $\mathscr{C}$ coincide con il numero dei punti comuni a $\mathscr{C}$ e ad una generica retta del piano, non componente $\mathscr{C}$, a patto di contare le intersezioni in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ e con la dovuta molteplicità.*

Quindi l'ordine di $\mathscr{C}$ è una sua proprietà geometrica. Come tale non dipende dalla scelta di una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, che determina un particolare sistema di coordinate proiettive omogenee in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ polinomio che rappresenta la curva: cambiando riferimento il polinomio F cambierà ma resterà invariato il suo grado.

2 Punti semplici e punti singolari

Sia $\mathscr{C}$ una curva algebrica di ordine n del piano proiettivo complesso. Sia r una retta qualsiasi passante per un dato punto P . L'intersezione $r \cap \mathscr{C}$ è data da n punti. Alcuni di essi possono coincidere con P: ciò dipende dalla retta scelta, ma può dipendere anche da P.

Definizione 7.5. *La* ***molteplicità*** $m_P(\mathscr{C})$ ***di una curva*** $\mathscr{C}$ ***nel punto*** $P \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ *è il minimo delle molteplicità di intersezione in* P *di* $\mathscr{C}$ *con* r*, al variare di* r *tra tutte le rette del fascio di centro* P*.*

La molteplicità di $\mathscr{C}$ in P è nulla se e solo se il punto non appartiene alla curva.
Se $P \in \mathscr{C}$, allora la molteplicità della curva $\mathscr{C}$ in P è

$$1 \leq m_P(\mathscr{C}) \leq n,$$

dove n è l'ordine di $\mathscr{C}$.

Definizione 7.6. *Un punto* $P \in \mathscr{C}$ *si dice* ***semplice*** *se* $m_P(\mathscr{C}) = 1$*, si dice* ***singolare o multiplo*** *se* $m_P(\mathscr{C}) > 1$*. In particolare se* $m_P(\mathscr{C}) = 2$*, il punto è detto* ***doppio****, se* $m_P(\mathscr{C}) = 3$ ***triplo****.*

Teorema 7.7. *Un punto* P *di una curva* $\mathscr{C}$ *di equazione* $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ *è singolare per* $\mathscr{C}$ *se e solo se le coordinate proiettive di* P *sono autosoluzioni del sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \end{cases}, \tag{7.2.1}$$

dove $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ *è la derivata parziale di* F *rispetto a* x_i*, per* $i = 1, 2, 3$.

Esempio 7.8. *Sia* $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 x_2 + x_3^2 x_2 + x_1 x_2 x_3$. *Allora*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_1 x_2 + x_2 x_3, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_1^2 + x_3^2 + x_1 x_3, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 x_2 + x_1 x_2.$$

Osservazione 7.9. *Se l'ordine di* F *è* n*, allora le derivate parziali hanno grado* $(n-1)$*, per cui il sistema (7.2.1) non è in generale lineare.*

Teorema 7.10. *Sia* $\mathscr{C}$ *una curva di ordine* n*. Allora:*

(a) $\mathscr{C}$ *non può avere punti* $(n+1)$*-upli;*

(b) se $\mathscr{C}$ *ha un punto* P n*-uplo,* $\mathscr{C}$ *è riducibile nell'unione di* n *rette passanti per* P*, contate con la dovuta molteplicità;*

(c) se $P \in \mathscr{C}$ *è un punto semplice, esiste una ed una sola retta* t *passante per* P *tale che almeno due delle* n *intersezioni* $t \cap \mathscr{C}$ *sono riunite in* P*. Tale retta si chiama* ***retta tangente*** *a* $\mathscr{C}$ *in* P *ed ha equazione*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_P x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_P x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_P x_3 = 0.$$

Capitolo 8

Coniche reali in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

Applichiamo alle coniche le proprietà delle curve algebriche.
Sia $\mathscr{C}$ una **conica reale**, cioè una curva algebrica reale del secondo ordine di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Essa è rappresentata quindi da un'equazione omogenea di secondo grado a coefficienti reali nelle variabili (complesse) x_1, x_2, x_3, ovvero da una forma quadratica reale $q \ : \ \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3$

$$\mathscr{C} \ : \ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

$\mathscr{C}$ è la chiusura proiettiva di

$$\mathscr{C}' \ : \ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

La conica $\mathscr{C}$ dipende da sei coefficienti reali, definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, per cui dipende da 5 coefficienti essenziali. Quindi per 5 punti passa in generale una conica di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ (che è univocamente determinata se al più tre di essi sono allineati).

Rappresentazione matriciale.
Sia $\mathscr{C}$ una conica di equazione $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$ e sia A la matrice simmetrica

$$A \ = \ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e sia

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Allora $\mathscr{C}$ ha equazione matriciale

$$\mathscr{C} \ : \ \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 0.$$

Dalle proprietà che valgono in generale per una curva algebrica si deducono subito alcune semplici proprietà delle coniche:

Proposizione 8.1. *Una conica è sempre intersecata da una retta in due punti, che possono essere:*

- *reali e distinti* $\longrightarrow$ *retta* **secante***;*
- *reali e coincidenti* $\longrightarrow$ *retta* **tangente***;*
- *immaginari e coniugati* $\longrightarrow$ *retta* **esterna**.

Proposizione 8.2. *Una conica è riducibile se e solo se contiene una retta. In tal caso si distinguono le seguenti possibilità:*

- $\mathscr{C} = r \cup s$, *rette reali e distinte;*
- $\mathscr{C} = r \cup r$, *rette reali e coincidenti;*
- $\mathscr{C} = r \cup \overline{r}$, *rette immaginarie e coniugate.*

Una conica *non* possiede *punti tripli* e, se ha un punto doppio, allora (cfr. Teorema (7.10)) *si spezza in due rette*, contate con la dovuta molteplicità.

1 Classificazione proiettiva delle coniche

La classificazione proiettiva delle coniche reali nel piano proiettivo complesso si riconduce sostanzialmente a distinguere tre tipi di coniche, distinti in base al numero di punti doppi da esse posseduti (0, 1 oppure infiniti): vale infatti il seguente

Teorema 8.3. *Se* $\mathscr{C}$ *è riducibile in due rette distinte allora* $\mathscr{C}$ *ha esattamente un punto doppio.*
Se $\mathscr{C}$ *è riducibile in due rette reali e coincidenti allora* $\mathscr{C}$ *ha almeno due punti doppi.*

Definizione 8.4. *Una conica può essere:*

- ***generale**, se non ha punti doppi;*
- ***semplicemente degenere**, se ha uno e un solo punto doppio;*
- ***doppiamente degenere** se ha ∞^1 punti doppi.*

Teorema 8.5. *Data la conica $\mathscr{C}$ di equazione $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = 0$, con $A = A^T$, sia q la forma quadratica associata. Allora*

1. *$\mathscr{C}$ è generale se e solo se $\det A \neq 0$, se e solo se $(\mathbb{R}^3, q)$ è uno spazio quadratico regolare;*
2. *$\mathscr{C}$ è semplicemente riducibile o degenere se e solo se $\mathrm{rg}A = 2$, se e solo se $\dim(\mathbb{R}^3)^\perp = 1$;*
3. *$\mathscr{C}$ è doppiamente degenere se e solo se $\mathrm{rg}A = 1$, se e solo se $\dim(\mathbb{R}^3)^\perp = 2$.*

Tale distinzione è indipendente dalla scelta della base in $\mathbb{R}^3$.

Dimostrazione. Sia

$$\mathscr{C} \;:\; F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

P è un punto doppio per $\mathscr{C}$ se e solo se le sue coordinate sono autosoluzioni del sistema

$$\text{(8.1.1)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\text{(8.1.2)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Si ottiene quindi il sistema $A\boldsymbol{x} = 0$, lineare omogeneo che ha come matrice dei coefficienti la matrice di $\mathscr{C}$. Si noti che tale sistema costituisce (per il Teorema 3.21) un sistema di equazioni cartesiane per il radicale dello spazio quadratico $(\mathbb{R}^3, q)$. Per la teoria dei sistemi lineari:

(a) $\det A \neq 0$ se e solo se esiste solo la soluzione banale, se e solo se non ci sono punti doppi, se e solo se la conica è generale;

(b) $\mathrm{rg}A = 2$ se e solo se ci sono ∞^1 soluzioni proporzionali, se e solo se c'è un unico punto doppio, se e solo se la conica è semplicemente degenere;

(c) $\mathrm{rg}A = 1$ se e solo se ci sono infiniti punti doppi (tutti allineati), se e solo se la conica è doppiamente degenere.

Per concludere la dimostrazione, si noti che, se in $\mathbb{R}^3$ si sceglie una nuova base, a cui corrisponde una matrice di cambiamento di base M, la matrice della forma quadratica q associata alla conica si trasformerà nella matrice M^tAM, congruente ad A, quindi con lo stesso rango: del resto avevamo già osservato in (Cap. 3, par. (2.1)) che la dimensione del radicale di una forma quadratica è un invariante geometrico, cioè indipendente dalla base (cfr. Teorema (3.21), e questa proprietà ha il suo riscontro, nel contesto della teoria delle coniche, nell'*invarianza proiettiva* (cioè, indipendenza dalla base scelta in $\mathbb{R}^3$) del tipo di conica relativamente al numero di punti doppi. $\square$

La dimostrazione del precedente teorema giustifica anche la seguente

Osservazione 8.6. *Se la conica $\mathscr{C}$ è degenere, allora i suoi punti doppi corrispondono ai vettori di $\mathbb{R}^3$ che compongono il radicale $(\mathbb{R}^3)^\perp$ della forma quadratica q di $\mathbb{R}^3$ associata alla conica $\mathscr{C}$.*

2 Tangenti condotte da un punto ad una conica

Definizione 8.7. *Una retta r si dice* ***tangente*** *ad una conica $\mathscr{C}$ se l'intersezione $r \cap \mathscr{C}$ è un punto semplice P e la molteplicità d'intersezione in P di $\mathscr{C}$ con r è 2 (ovvero, come si usa dire, il punto P è contato due volte in $r \cap \mathscr{C}$).*

Se Q è un punto qualsiasi del piano, vogliamo determinare quante sono le tangenti che si possono condurre a $\mathscr{C}$ da Q e le loro equazioni. Siano

$$\mathscr{C} \ : \ \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 0, \qquad \text{con} \qquad A = A^T,$$

$$Q = [(x_1^Q, x_2^Q, x_3^Q)] = \boldsymbol{x}^Q.$$

Scriviamo l'equazione della generica retta r passante per Q e imponiamo che $r \cap \mathscr{C}$ sia un punto contato due volte, cioè che l'equazione risolvente $r \cap \mathscr{C}$ (di secondo grado) abbia due soluzioni reali e coincidenti.
Retta r:

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{z} + \mu \boldsymbol{x}^Q,$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 = \lambda z_1 + \mu x_1^Q \\ x_2 = \lambda z_2 + \mu x_2^Q \\ x_3 = \lambda z_3 + \mu x_3^Q \end{cases},$$

dove $\boldsymbol{z} = [(z_1, z_2, z_3)]$ sono le coordinate proiettive omogenee di un generico punto di r.
$r \cap \mathscr{C}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + t\boldsymbol{x}^Q \end{cases}, \qquad \text{con } t := \mu/\lambda$$

Sostituiamo l'espressione di x nella prima equazione:

$$(\boldsymbol{z} + t\boldsymbol{x}^Q)^T A(\boldsymbol{z} + t\boldsymbol{x}^Q) = 0$$

$$\boldsymbol{z}^T A \boldsymbol{z} + t((\boldsymbol{x}^Q)^T A \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^T A \boldsymbol{x}^Q) + t^2 (\boldsymbol{x}^Q)^T A \boldsymbol{x}^Q = 0$$

$$t^2((\boldsymbol{x}^Q)^T A \boldsymbol{x}^Q) + 2t(\boldsymbol{z}^T A \boldsymbol{x}^Q) + (\boldsymbol{z}^T A \boldsymbol{z}) = 0 \tag{8.2.1}$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione di secondo grado in t, le cui soluzioni danno i valori del parametro che, sostituiti nelle equazioni parametriche di r, forniscono i due punti $r \cap \mathscr{C}$.
Si deve ora imporre che l'equazione (8.2.1) risolvente del sistema $r \cap \mathscr{C}$ abbia due soluzioni reali e coincidenti; dobbiamo cioè imporre che il discriminante di (8.2.1) sia nullo.
Si perviene in questo modo all'equazione (sostituendo $\boldsymbol{z}$ con $\boldsymbol{x}$)

$$(\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}^Q)^2 - ((\boldsymbol{x}^Q)^T A \boldsymbol{x}^Q)(\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}) = 0 \tag{8.2.2}$$

che caratterizza tutti e soli i punti di coordinate proiettive $\boldsymbol{x}$ che appartengono alle rette per Q che hanno due intersezioni con $\mathscr{C}$ riunite in un punto solo, cioè tangenti a $\mathscr{C}$.

L'equazione (8.2.2), di secondo grado, a coefficienti reali, nelle variabili x_1, x_2, x_3 rappresenta a sua volta una conica che, come può verificarsi direttamente, ha Q come punto doppio, ed è quindi costituita da una coppia di rette uscenti da Q.

- Se la conica $\mathscr{C}$ è irriducibile, si conclude che da Q escono due tangenti a $\mathscr{C}$, la cui equazione complessiva è (8.2.2). Tali tangenti possono essere:

  (a) reali e distinte: diremo allora che Q è **esterno** a $\mathscr{C}$;

  (b) immaginarie e coniugate: diremo allora che Q è **interno** a $\mathscr{C}$;

  (c) reali e coincidenti, se e solo se Q **appartiene** a $\mathscr{C}$.

  Infatti se $Q \in \mathscr{C}$, cioè se $(\boldsymbol{x}^Q)^T A \boldsymbol{x}^Q = 0$, l'equazione (8.2.2) diventa

  $$(\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}^Q)^2 = 0$$

  e rappresenta quindi la tangente a $\mathscr{C}$ in Q, contata due volte.

  La retta per $Q \in \mathscr{C}$ tangente a $\mathscr{C}$ ha dunque equazione

  $$(\boldsymbol{x}^Q)^T A \boldsymbol{x} = 0$$

  Osservazione 8.8. *Avevamo già determinato per una curva algebrica reale l'equazione della tangente in un suo punto semplice Q, data da:*

  $$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_Q x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_Q x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_Q x_3 = 0.$$

  Se $F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j$, allora tale equazione coincide con quella che abbiamo appena ottenuto, che, a sua volta ammette la scrittura equivalente

  $$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}^Q = 0.$$

- Se la conica $\mathscr{C}$ è riducibile, semplicemente degenere, e Q un punto del piano diverso dal suo punto doppio V, l'equazione (8.2.2) rappresenta la retta $\mathrm{rt}(Q, V)$ contata due volte: questa infatti è l'unica retta uscente da Q che incontri $\mathscr{C}$ in due punti coincidenti.

Diremo anche in questo caso (pur essendo V un punto doppio) che $\mathrm{rt}(Q,V)$ è la **tangente** (unica) a $\mathscr{C}$ per il punto Q.

Se $Q \in \mathscr{C}$, in particolare, nell'equazione (8.2.2) risulterà $(\boldsymbol{x}^Q)^T A\boldsymbol{x}^Q = 0$, per cui la retta $\mathrm{rt}(Q,V)$ avrà equazione: $(\boldsymbol{x}^Q)^T A\boldsymbol{x} = 0$ (come nel caso $\mathscr{C}$ irriducibile), che rappresenta stavolta una delle due rette (distinte) in cui si spezza la conica.

- Se la conica $\mathscr{C}$ è riducibile, doppiamente degenere,...

3 Polarità indotta da una conica

3.1 Relazione di coniugio

Definizione 8.9. *Data la conica* $\mathscr{C}\ :\ \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = 0$ *e dati due punti* $P = [(x_1^0, x_2^0, x_3^0)]$ *e* $Q = [(y_1^0, y_2^0, y_3^0)]$*, diciamo che* P *è* ***coniugato*** *di* Q *rispetto a* $\mathscr{C}$ *se*

$$\boldsymbol{x}_0^T A\boldsymbol{y}_0 = 0,$$

avendo posto

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{bmatrix}.$$

Osservazione 8.10. *Equivalentemente possiamo dire che i vettori* $\boldsymbol{x}_0$ *e* $\boldsymbol{y}_0$ *sono ortogonali rispetto alla forma quadratica* q *indotta da* A*, in* $(\mathbb{R}^3, q)$ *(si noti che, se* $\boldsymbol{x}_0 \perp \boldsymbol{y}_0$*, lo stesso vale per ogni coppia di vettori proporzionali rispettivamente ad* $\boldsymbol{x}_0$ *e ad* $\boldsymbol{y}_0$*).*

Osservazione 8.11. *Se* P *è coniugato di* Q *rispetto a una conica* $\mathscr{C}$*, allora* Q *è coniugato di* P *rispetto ad essa, cioè* la relazione di coniugio è simmetrica*, infatti:*

$$\boldsymbol{x}_0^T A\boldsymbol{y}_0 = (\boldsymbol{x}_0^T A\boldsymbol{y}_0)^T = \boldsymbol{y}_0^T A\boldsymbol{x}_0.$$

Esempio 8.12. *Sia* $\mathscr{C}$ *la conica di equazione*

$$\mathscr{C}\ :\ 2x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 1 = 0$$

e siano $P = (0,1)$, $Q = (3,2)$. Verifichiamo che essi non sono coniugati rispetto a $\mathscr{C}$.

Poiché

$$\overline{\mathscr{C}} \ : \ 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x^2 + 6x_1x_3 - x_3^2 = 0,$$

la matrice di $\mathscr{C}$ è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\boldsymbol{x}_P^T A \boldsymbol{y}_Q = [0 \ \ 1 \ \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 9 \neq 0$$

Per cui P e Q non sono coniugati rispetto a $\mathscr{C}$.

3.2 Polarità rispetto a una conica generale

Dato un punto $P = [(x_1^0, x_2^0, x_3^0)]$ e fissata una conica $\mathscr{C} \ : \ \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 0$, vogliamo determinare tutti i punti di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ che sono coniugati di P rispetto alla conica $\mathscr{C}$. Sia $\boldsymbol{x}_0 = [(x_1^0 \ \ x_2^0 \ \ x_3^0)]$. Tutti e soli i punti $\boldsymbol{x} = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]$ coniugati di P rispetto a $\mathscr{C}$ sono quelli le cui coordinate proiettive soddisfano l'equazione

$$\boldsymbol{x}_0^T A \boldsymbol{x} = 0,$$

cioè

$$[x_1^0 \ \ x_2^0 \ \ x_3^0] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Tale equazione è una equazione lineare in x_1, x_2, x_3, quindi è l'equazione di una retta (in $(\mathbb{R}^3, q)$ risulta un piano vettoriale, precisamente il complemento ortogonale $<\boldsymbol{x}_0>^\perp$). Essa si riduce ad una identità solo se

$$[x_1^0 \ \ x_2^0 \ \ x_3^0] \ A \ = [0 \ \ 0 \ \ 0],$$

cioè , trasponendo

$$A\boldsymbol{x}_0 = 0,$$

ossia

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 \\ a_{12}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0 \\ a_{13}x_1^0 + a_{23}x_2^0 + a_{33}x_3^0 \end{cases},$$

cioè P è autosoluzione del sistema

$$A\boldsymbol{x} = 0,$$

se e solo se P è un punto doppio per la conica, se e solo se solo se $\boldsymbol{x}$ appartiene al radicale di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema 8.13. *Data la conica $\mathscr{C}$ di equazione $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = 0$, il luogo dei punti coniugati del punto $P = [(x_1^0, x_2^0, x_3^0)]$ è una retta, a meno che P non sia un punto doppio per $\mathscr{C}$; in tal caso i punti di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ sono coniugati di P rispetto a $\mathscr{C}$.*

Dunque se $\mathscr{C}$ è una *conica generale*, possiamo definire la funzione

$$\pi \ : \ \begin{cases} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{R} \\ P = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) & \longmapsto & \pi(P) \end{cases},$$

dove $\pi(P)$ è la retta dei punti coniugati di P, detta **retta polare** di P e ha equazione $\boldsymbol{x}_0^T A\boldsymbol{x} = 0$. L'applicazione π si dice **polarità** ed è una biiezione tra $\mathscr{P}$ e $\mathscr{R}$ (così come la relazione di ortogonalità in $(\mathbb{R}^3, q)$ è una biiezione che scambia rette vettoriali con piani vettoriali, se q è regolare.)

Teorema 8.14 (Legge di reciprocità). *Data una conica $\mathscr{C}$ generale e dato un punto P sia $p = \pi(P)$ la retta polare di P rispetto a $\mathscr{C}$. Allora*

(a) se $S \in p$, la polare di S passa per P;

(b) se t è una retta per P, il suo polo appartiene alla retta p.

Teorema 8.15. *Sia $\mathscr{C}$ una conica generale e sia π la polarità che essa induce. Allora*

$$P \in \mathscr{C} \iff P \in \pi(P).$$

In tal caso $\pi(P)$ è la retta tangente a $\mathbb{C}$ in P.

Dimostrazione. Sia $P = [(x_1^0, x_2^0, x_3^0)]$, rappresentato dal vettore $\boldsymbol{x}_0$, e sia $\mathscr{C}$ la conica di equazione $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = 0$. Allora $\pi(P)$ è la retta

$$\boldsymbol{x}_0^T A\boldsymbol{x} = 0$$

e la condizione $\boldsymbol{x}_0^T A\boldsymbol{x}_0 = 0$ è la condizione di appartenenza di P a $\mathscr{C}$ e anche di appartenenza di P alla sua retta polare.
Abbiamo poi visto che se $P \in \mathscr{C}$ e è un punto semplice, allora l'equazione $\boldsymbol{x}_0^T A\boldsymbol{x} = 0$ è uno dei modi di esprimere la retta tangente a $\mathscr{C}$ nel punto P. □

Osservazione 8.16. *Il Teorema precedente si può riformulare anche nei seguenti termini: $\boldsymbol{x}$ è isotropo in $(\mathbb{R}^3, q)$, spazio quadratico regolare, se e solo se $\boldsymbol{x} = <\boldsymbol{x}>^\perp$.*

Ci chiediamo se sia possibile caratterizzare geometricamente la polarità nel caso in cui P non appartenga a $\mathscr{C}$.

Teorema 8.17 (Caratterizzazione geometrica della polarità). *Sia $\mathscr{C}$ una conica generale di equazione $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = 0$ e sia π la polarità da essa indotta. Consideriamo un punto P non appartenente a $\mathscr{C}$. Allora la polare di P è la retta congiungente i punti di contatto con $\mathscr{C}$ delle due tangenti a $\mathscr{C}$ condotte da P.*

Dimostrazione. Siano t_1 e t_2 le due tangenti condotte da P alla conica $\mathscr{C}$ e siano T_1 e T_2 i rispettivi punti di tangenza. Poiché t_1 è la polare di T_1 e $P \in t_1$, allora P è coniugato con T_1. Analogamente si ha che P è coniugato con T_2. Quindi T_1 e T_2 appartengono alla polare di P, pertanto essa coincide con la retta passante per T_1 e T_2. □

Definizione 8.18. *Due rette si dicono* ***coniugate*** *rispetto a una conica $\mathscr{C}$ quando l'una contiene il polo dell'altra.*

Osservazione 8.19. *Due piani vettoriali di $\mathbb{R}^3$ sono ortogonali rispetto alla forma quadratica q quando l'uno contiene il complemento ortogonale dell'altro.*

Vogliamo ora determinare il polo di una retta data.
Il polo di una retta r è il punto R tale che $\pi(R) = r$ (ricordiamo che π è biiettiva). Usiamo il Teorema di Reciprocità: fissiamo due punti distinti P e Q sulla retta r e consideriamo le polari di questi punti $p = \pi(P)$ e $q = \pi(Q)$. Le rette p e q sono distinte, quindi poniamo $R := p \cap q$. Allora il punto R è coniugato sia di P che di Q, perciò P e Q appartengono alla polare di R, dunque R è il polo di r.

4 Fasci di coniche

Definizione 8.20. *Siano $\mathscr{C}_1 \ : \ \boldsymbol{x}^T A_1 \boldsymbol{x} = 0$ e $\mathscr{C}_2 \ : \ \boldsymbol{x}^T A_2 \boldsymbol{x} = 0$ due coniche distinte in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Si dice **fascio di coniche** individuato da $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ la totalità delle coniche di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ la cui equazione è combinazione lineare delle equazioni di $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$:*

$$\mathscr{F} \ : \ \lambda(\boldsymbol{x}^T A_1 \boldsymbol{x}) + \mu(\boldsymbol{x}^T A_2 \boldsymbol{x}) = 0, \qquad \textit{con} \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0),$$

equivalentemente

$$\boldsymbol{x}^T(\lambda A_1 + \mu A_2)\boldsymbol{x} = 0.$$

*Le coniche $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ si dicono **coniche base o generatrici** del fascio.*
Scriveremo anche $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$.

Osservazione 8.21. *Se $\mathscr{C}_1'$ e $\mathscr{C}_2'$ sono due coniche distinte qualsiasi del fascio $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$, allora*

$$\mathscr{F}(\mathscr{C}_1', \mathscr{C}_2') = \mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2).$$

In altre parole un fascio $\mathscr{F}$ di coniche è determinato da una qualsiasi coppia di coniche distinte di $\mathscr{F}$.

Osservazione 8.22. *Vogliamo determinare la natura delle coniche di $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$. Se $P \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$, allora, siccome le coordinate di P soddisfano entrambe le equazioni che rappresentano le due coniche, si ha, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:*

$$\lambda(\boldsymbol{x}^P)^T A_1 \boldsymbol{x}^P + \mu(\boldsymbol{x}^P)^T A_2 \boldsymbol{x}^P = 0,$$

cioè P appartiene a tutte le coniche di $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$ (dunque la natura delle coniche di $\mathscr{F}$ dipende anche dall'intersezione $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$). Ci sono due possibilità:

- *$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ contiene una retta r, quindi $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ sono degeneri, e ci saranno altre due rette s ed s' (eventualmente coincidenti con r) tali che $\mathscr{C}_1 = r \cup s$, $\mathscr{C}_2 = r \cup s'$.*
  Se poniamo $P := s \cap s'$, ogni conica del fascio è riducibile nella retta r e in un'altra retta del fascio di rette di centro P.

- *$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A, B, C, D\}$, cioè 4 punti, contati con la dovuta molteplicità.*
  *Sia $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$. Questi punti si chiamano **punti base** del fascio.*
  Ogni conica del fascio passa per i punti base.

Ci chiediamo quante sono le coniche che passano per un ulteriore punto E, distinto dai precedenti.
Sia $E = (x_1^E, x_2^E, x_3^E)$. Imponiamo alla generica conica di $\mathscr{F}$ il passaggio per E:

$$\lambda(\boldsymbol{x}^E)^T A_1 \boldsymbol{x}^E + \mu(\boldsymbol{x}^E)^T A_2 \boldsymbol{x}^E = 0.$$

Otteniamo una equazione in λ e μ lineare e omogenea, quindi abbiamo una classe di soluzioni non banali e proporzionali $[(\overline{\lambda}, \overline{\mu})]$, per cui la conica di $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$ passante per A, B, C, D, E è unica.
Dunque per *ogni punto del piano, diverso dai punti base, passa una e una sola conica del fascio.*

Proposizione 8.23. *Sia $\mathscr{C}$ una conica di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ passante per i quattro punti base del fascio $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$. Allora $\mathscr{C} \in \mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$.*

Dimostrazione. Siano A, B, C, D i punti base di $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$. Sia $\mathscr{C}$ una conica tale che $A, B, C, D \in \mathscr{C}$ e sia P un ulteriore punto di $\mathscr{C}$. Poiché $P \notin \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$, esiste una e una sola conica $\overline{\mathscr{C}}$ del fascio $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$ tale che $P \in \overline{\mathscr{C}}$. D'altra parte $A, B, C, D \in \overline{\mathscr{C}}$, perché sono i punti base di $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$. Ma allora

$$A, B, C, D, P \in \mathscr{C} \cap \overline{\mathscr{C}}.$$

Per 5 punti passa una e una sola conica, quindi $\mathscr{C} = \overline{\mathscr{C}}$. □

Proposizione 8.24. *In un fascio di coniche che non siano tutte riducibili, le coniche riducibili sono al più tre. In ogni caso nel fascio esiste sempre almeno una conica riducibile (reale).*

Dimostrazione. La generica conica di $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$ è individuata dalla matrice simmetrica $\lambda A_1 + \mu A_2$ e la sua riducibilità dipende dal $\det(\lambda A_1 + \mu A_2)$ (polinomio di terzo grado omogeneo in λ e μ, a coefficienti reali). Esso in $\mathbb{C}$ ha tre coppie di radici, ma poiché è di grado dispari una di esse è certamente reale. Quindi in $\mathscr{F}$ ci sono al più tre coniche riducibili reali e almeno una conica riducibile reale. □

Tipi di fascio e coniche degeneri

Consideriamo qui il caso di un *fascio di coniche che non siano tutte riducibili*: ne distinguiamo i vari tipi in funzione dei 4 punti base e ne determiniamo le coniche riducibili.

- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = 4$ punti base distinti: A, B, C, D.
  Le coniche degeneri sono
  $$\operatorname{rt}(A,B) \cup \operatorname{rt}(C,D), \qquad \operatorname{rt}(A,C) \cup \operatorname{rt}(B,D), \qquad \operatorname{rt}(A,D) \cup \operatorname{rt}(B,C).$$
  Il fascio si può ottenere come combinazione lineare di due di queste coniche degeneri (più facili da determinare).

- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = 3$ punti A, B, C, dove A ha molteplicità 2.
  Le coniche $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ passano per A e hanno in A la stessa retta tangente t_A. Si parla allora di **fascio di coniche tangenti** perché tutte le coniche del fascio passano per A e hanno in A retta tangente t_A.
  Le coniche degeneri sono
  $$t_A \cup \operatorname{rt}(B,C), \qquad \operatorname{rt}(A,B) \cup \operatorname{rt}(A,C).$$

- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = 2$ punti A, B, ciascuno con molteplicità 2.
  Cioè $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ passano entrambe per A e B e ammettono in quei punti le stesse rette tangenti: t_A e t_B. Ogni conica di $\mathscr{F}$ passa per A e per B e ha

per tangenti in quei punti le rette t_A e t_B. Il fascio si dice **fascio di coniche bitangenti**.
Le coniche degeneri sono

$$t_A \cup t_B, \qquad \mathrm{rt}(A,B) \cup \mathrm{rt}(A,B).$$

- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 =$ i punti A, B, dove A ha molteplicità 3.
  Le coniche $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ passano per A e hanno in A retta tangente t_A con contatto triplo. Si parla di **fascio di coniche osculatrici**: ogni conica passa per A e ha come tangente in A la retta t_A.
  La conica degenere è
  $$t_A \cup \mathrm{rt}(A,B).$$
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A\}$: un unico punto con molteplicità 4.
  Un tale fascio si dice **fascio di coniche iperosculatrici**.
  La conica degenere è
  $$t_A \cup t_A$$

La teoria dei fasci di coniche è utile per determinare l'equazione di una conica a partire dai punti di passaggio o dalle rette tangenti.

Esempio 8.25. *Determiniamo l'equazione della conica $\mathscr{C}$ passante per $P = (0,1)$, $Q = (1,1)$, $R = (\sqrt{2}, 0)$ e tangente in $O = (0,0)$ alla retta r di equazione $x+y = 0$. La conica $\mathscr{C}$ appartiene al fascio di coniche tangenti ad r in O e passanti per P, Q. Le coniche degeneri di questo fascio sono*

$$x + y = 0 \cup \mathrm{rt}(P,Q), \qquad \mathrm{rt}(O,P) \cup \mathrm{rt}(O,Q).$$

Determiniamo tali rette:

$$\mathrm{rt}(P,Q) \;:\; y - 1 = 0, \qquad \mathrm{rt}(O,P) \;:\; x = 0, \qquad \mathrm{rt}(O,Q) \;:\; y - x = 0.$$

Per cui il fascio $\mathscr{F}$ è dato da

$$\lambda(x+y)(y-1) + \mu x(y-x) = 0.$$

Imponiamo il passaggio per $R = (\sqrt{2}, 0)$:

$$\lambda(\sqrt{2})(-1) + \mu\sqrt{2}(-\sqrt{2}) = 0,$$

da cui

$$-\lambda\sqrt{2} - 2\mu = 0 \implies \mu = -\frac{\lambda\sqrt{2}}{2}.$$

Siccome λ e μ sono parametri omogenei possiamo porre $\lambda = 1$ e di conseguenza $\mu = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, pertanto la conica richiesta ha equazione

$$(x+y)(y-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}x(y-x) = 0,$$

a conti fatti

$$\sqrt{2}x^2 + xy(2-\sqrt{2}) + 2y^2 - 2x - 2y = 0.$$

5 Classificazione affine delle coniche generali

Consideriamo ora quelle nozioni relative alle coniche che assumono significato quando si consideri fissata, nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, la retta impropria, e quindi si considerino distinti l'insieme dei punti propri (piano affine) e l'insieme dei punti impropri (retta impropria). Le nozioni e le proprietà che derivano allora dal considerare particolari relazioni con gli elementi impropri, verranno dette *nozioni* e *proprietà affini* delle coniche.

Definizione 8.26. *Sia $\mathscr{C}$ una conica generale e siano P e Q le sue intersezioni con la retta impopria di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. La conica si dice* ***ellisse*** *se P e Q sono immaginari e coniugati,* ***parabola*** *se P e Q sono reali e coincidenti,* ***iperbole*** *se P e Q sono reali e distinti.*

Osservazione 8.27. *In altre parole la parabola è tangente alla retta impropria.*

Ci chiediamo come riconoscere affinemente la conica nota la sua equazione:

$$\mathscr{C} \ : \ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Studiamo il sistema $\mathscr{C} \cap r_\infty$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

dobbiamo quindi studiare le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Per cui

- se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, allora l'equazione ha due soluzioni reali e distinte, per cui la conica è un'iperbole;
- se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, allora l'equazione ha due soluzioni reali e coincidenti, per cui la conica è una parabola;
- se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, allora l'equazione ha due soluzioni immaginarie e coniugate, per cui la conica è un'ellisse.

Abbiamo cioè dimostrato il seguente

Teorema 8.28. *Data la conica*

$$\mathscr{C} \ : \ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

si ha che

- $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0 \iff \mathscr{C}$ *è un'iperbole;*
- $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \iff \mathscr{C}$ *è una parabola;*
- $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \iff \mathscr{C}$ *è un'ellisse.*

Osservazione 8.29. *Consideriamo la matrice della conica $\mathscr{C}$:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Il rango di A dà informazioni sulla riducibilità della conica, mentre il determinante del minore

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dà informazione sul tipo affine di $\mathscr{C}$.

Osservazione 8.30. *Passiamo dalla conica data* $\mathscr{C}$ *alla conica*

$$\mathscr{C}' \ : \ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

La conica $\mathscr{C}'$ *ha gli stessi punti impropri di* $\mathscr{C}$*, passa per il punto* $[(0,0,1)]$ *ed è riducibile. Quindi*

- $\mathscr{C}$ *è un'iperbole se e solo se* $\mathscr{C}'$ *è una coppia di rette reali e distinte, passanti per* $[(0,0,1)]$*;*
- $\mathscr{C}$ *è una parabola se e solo se* $\mathscr{C}'$ *è una coppia di rette reali e coincidenti, passanti per* $[(0,0,1)]$*;*
- $\mathscr{C}$ *è un'ellisse se e solo se* $\mathscr{C}'$ *è una coppia di rette immaginarie e coniugate, passanti per* $[(0,0,1)]$.

5.1 Centro, diametri, asintoti

Data una conica $\mathscr{C}$ e considerata la polarità π da essa indotta in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, definiamo i seguenti elementi:

Definizione 8.31. *Si dice* ***centro*** *di una conica generale* $\mathscr{C}$ *il polo della retta impropria.*

Osservazione 8.32. *Se* $\mathscr{C}$ *è una parabola il suo centro è il suo punto improprio (infatti* $\mathscr{C}$ *è tangente alla retta impropria).*

Definizione 8.33. *La conica* $\mathscr{C}$ *si dice* ***conica a centro*** *se il suo centro è un punto proprio (per cui* $\mathscr{C}$ *è un'ellisse o un'iperbole).*

Definizione 8.34. *Un* ***diametro*** *per* $\mathscr{C}$ *è una retta passante per il centro.*

Equivalentemente un diametro è la retta polare di un punto improprio.

Definizione 8.35. *Gli* ***asintoti*** *di una conica a centro sono le tangenti a* $\mathscr{C}$ *nei suoi punti impropri*

Osservazione 8.36. *Gli asintoti sono polari di punti impropri, per cui sono diametri e, come tali, passano per il centro della conica.*

Dunque gli asintoti sono le rette che congiungono il centro di $\mathscr{C}$ con i suoi punti impropri. Poiché il centro è un punto proprio e reale, si ha

- $\mathscr{C}$ è una iperbole se e solo se ha due asintoti reali e distinti;
- $\mathscr{C}$ è una ellisse se e solo se ha due asintoti immaginari e coniugati.

Vogliamo ora determinare analiticamente questi elementi. Consideriamo la conica $\mathscr{C}$ di equazione:

$$\mathscr{C} \ : \ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Centro. Dobbiamo determinare il polo della retta impropria. Scegliamo due punti impropri comodi e ne scriviamo le polari. Otterremo il centro C come intersezione di queste due rette.
Consideriamo i punti impropri $X_\infty = [(1,0,0)]$ e $Y_\infty = [(0,1,0)]$. Le rette polari sono:

$$[1 \ \ 0 \ \ 0] \ A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{e} \qquad [0 \ \ 1 \ \ 0] \ A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

che danno:

$$\text{polare di } X_\infty \ : \ a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 = 0, \quad \text{polare di } Y_\infty \ : \ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 = 0,$$

per cui

$$C \ : \ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che se il determinante del minore

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

è nullo, allora C è improprio perché le due rette sono parallele; infatti tale condizione è proprio quella che caratterizza la parabola:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Per trovare il centro di $\mathscr{C}$, se $\mathscr{C}$ è una parabola, basterà trovare il punto improprio di una di queste due rette (parallele).

Diametri. Si tratta di determinare l'equazione di una qualsiasi retta passante per C, cioè una retta del fascio di sostegno C:

$$\lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \mu(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0,$$

con $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Oppure, siccome un diametro è la retta polare di un punto improprio $[(l,m,0)]$, con $(l,m) \neq (0,0)$, si pone

$$[l \;\; m \;\; 0]\; A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

da cui ancora

$$l(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + m(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0.$$

Asintoti. Sia $C = (x_0, y_0)$ il centro di $\mathscr{C}$.
Se $C = (0,0)$ abbiamo già visto che l'equazione complessiva delle rette che congiungono $[(0,0,1)]$ con i punti impropri di $\mathscr{C}$ è

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Altrimenti, l'equazione complessiva degli asintoti diventa

$$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0.$$

Infatti questa è l'equazione di una conica con punto doppio (x_0, y_0) e avente gli stessi punti impropri di $\mathscr{C}$, per cui è l'equazione degli asintoti.
Le direzioni degli asintoti si ottengono invece imponendo al generico diametro di contenere il proprio polo, cioè

$$[l \;\; m \;\; 0]\; A \begin{bmatrix} l \\ m \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

sviluppando

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0.$$

Proposizione 8.37. *Se $P \in \mathscr{C}$, allora anche il simmetrico P' di P rispetto al centro C è un punto della conica. Inotre le polari t_P e $t_{P'}$ di P e P' rispettivamente sono parallele.*

Infatti sono polari di punti appartenenti a uno stesso diametro d, per cui passano per il polo di d che è un punto improprio.

6 Proprietà metriche delle coniche

Procediamo a questo punto ad un secondo livello di specializzazione nello studio delle coniche: dopo aver introdotto e studiato le nozioni e le proprietà affini considerando le relazioni delle coniche con il piano affine reale e complesso, introduciamo ora nel piano affine reale $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ la struttura di piano euclideo $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ attraverso il prodotto scalare euclideo definito su $\mathbb{R}^2$ che permette di trattare le nozioni di distanze, angoli e ortogonalità; tale struttura metrica del piano affine reale è strettamente collegata con una particolare coppia di punti immaginari e coniugati del piano proiettivo complesso appartenente alla retta impropria: i *punti ciclici del piano* che ora introdurremo.

6.1 Circonferenze generalizzate di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Definizione 8.38. *Si chiama* **circonferenza generalizzata** *una conica di equazione*

$$\mathscr{C}:\ k(x_1^2+x_2^2)+ax_1x_3+bx_2x_3+cx_3^2=0,\qquad k,a,b,c\in\mathbb{R}. \tag{8.6.1}$$

Esaminiamo ora, al variare dei parametri coinvolti, la natura della curva, come sempre considerando l'ampliamento complesso $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ del piano proiettivo reale; osserviamo subito che le circonferenze generalizzate sono delle particolari coniche perché sono definite da un'equazione omogenea di secondo grado.

$k=0$. In questo caso l'equazione (8.6.1) diventa

$$x_3(ax_1+bx_2+cx_3)=0,$$

pertanto la curva si spezza nell'unione di due rette, di cui almeno una è la retta impropria $x_3=0$.

$k\neq 0$. Poichè i coefficienti sono assegnati a meno di un fattore di proporzionalità possiamo supporre $k=1$. Cominciamo col determinare i punti impropri della conica $\mathscr{C}$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+ax_1x_3+bx_2x_3+cx_3^2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

si determinano i due punti immaginari e coniugati $I_\infty = [(1,i,0)]$ e $J_\infty = [(1,-i,0)]$, che pertanto sono comuni a tutte le circonferenze generalizzate.

Definizione 8.39. *I punti* $I_\infty = [(1,i,0)]$ *e* $J_\infty = [(1,-i,0)]$ *si chiamano* **punti ciclici** *di* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$*. Le rette di* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ *che passano per i punti ciclici si chiamano* **rette isotrope**.

Ora che abbiamo determinato i punti impropri di $\mathscr{C}$ possiamo proseguire lo studio di (8.6.1) passando alle coordinate affini:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Addizionando ad entrambi i membri la quantità $a^2/4 + b^2/4$ e raccogliendo i quadrati si ottiene l'equazione

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c. \tag{8.6.2}$$

Distinguiamo ora tre ulteriori casi.

1. Se $a^2/4 + b^2/4 - c > 0$ l'equazione (8.6.2) rappresenta una *circonferenza* del piano affine reale euclideo il cui raggio è dato dal valore positivo della radice quadrata del termine $a^2/4 + b^2/4 - c$, e le coordinate del centro sono $(-a/2, -b/2)$.
2. Se $a^2/4 + b^2/4 - c = 0$ l'equazione (8.6.2) può essere riscritta nella forma
$$\left(x + \frac{a}{2} + i\left(y + \frac{b}{2}\right)\right)\left(x + \frac{a}{2} - i\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) = 0,$$
e quindi rappresenta una coppia di rette immaginare e coniugate il cui punto di intersezione è $C = (-a/2, -b/2)$, unico punto reale di $\mathscr{C}$ (*circonferenza di raggio nullo*). Si noti che le due rette r_1 ed r_2 in cui si spezza la conica $\mathscr{C}$ hanno come direzioni i punti ciclici del piano, pertanto sono rette isotrope.
3. Se $a^2/4 + b^2/4 - c < 0$ l'equazione (8.6.2) rappresenta una circonferenza di centro reale $C = (-a/2, -b/2)$, ma a punti completamente immaginari.

Abbiamo già osservato che le circonferenze generalizzate sono coniche che intersecano la retta impropria nei punti ciclici. Tale fatto in effetti è una caratterizzazione delle circonferenze generalizzate, come mostrato nella seguente

Proposizione 8.40. *Le circonferenze generalizzate sono tutte e sole le coniche di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ che passano per i punti ciclici.*

Dimostrazione. Una implicazione è già stata dimostrata. Supponiamo allora che

$$\mathscr{C}: \ a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

sia una conica che passa per i punti ciclici $I_\infty = [(1, i, 0)]$ e $J_\infty = [(1, -i, 0)]$. Allora le coordinate di tali punti devono verificare l'equazione di $\mathscr{C}$, dunque

$$\begin{cases} a_{11} - a_{22} + 2ia_{12} = 0 \\ a_{11} - a_{22} - 2ia_{12} = 0. \end{cases}$$

Ricordando che gli a_{ij} sono numeri reali le equazioni del precedente sistema si traducono nel seguente

$$\begin{cases} a_{11} - a_{22} = 0 \\ a_{12} = 0, \end{cases}$$

pertanto, avendo posto $a_{11} = a_{22} =: k$, la conica $\mathscr{C}$ ha equazione

$$k(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

ovvero è una circonferenza generalizzata. □

6.2 Assi e vertici

Definizione 8.41. *Un diametro si dice* ***asse*** *per una conica $\mathscr{C}$ se è ortogonale al proprio polo.*

Teorema 8.42. *Sia $\mathscr{C}$ una conica generale. Allora:*

(a) se $\mathscr{C}$ è a centro ha esattamente due assi, a meno che tutti i suoi diametri siano assi: in tal caso $\mathscr{C}$ è una circonferenza;

(b) se $\mathscr{C}$ ha due assi, essi sono tra loro ortogonali;

(c) se $\mathscr{C}$ è una parabola, essa ha solo un asse (proprio).

Dimostrazione.

(a) Sia

$$\mathscr{C} \;:\; a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Determiniamo l'equazione che dà la direzione degli assi. Consideriamo il generico diametro, dato da

$$l(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + m(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0,$$

$(l, m) \in \mathbb{R}^2, (l, m) \neq (0, 0)$. Imponiamo che tale diametro passi per il punto $[(-m, l, 0)]$, direzione ortogonale a $[(l, m, 0)]$:

$$l(a_{11}(-m) + a_{12}l + a_{13} \cdot 0) + m(a_{12}(-m) + a_{22}l + a_{23} \cdot 0) = 0,$$

da cui

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0.$$

Questa equazione caratterizza le direzioni degli assi. Poiché

$$\Delta = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0,$$

avremo sempre due assi reali e distinti, a meno che

$$a_{22} - a_{11} = 0 \qquad \text{e} \qquad a_{12} = 0,$$

ma allora l'equazione degli assi diventa

$$0l^2 + 0lm + 0m^2 = 0,$$

cioè ogni diametro è asse e $\mathscr{C}$ è una circonferenza, essendo $a_{22} = a_{11}$ e $a_{12} = 0$.

(c) Per la parabola si ha $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$, per cui

$$\Delta = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 = (a_{11} + a_{22})^2,$$

quindi le radici sono

$$\frac{l}{m} = \frac{-(a_{22}-a_{11}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2}}{2a_{12}},$$

cioè $\frac{a_{11}}{a_12}$ e $\frac{a_{22}}{a_12}$. Sostituendo questi due valori nell'equazione dei diametri, otteniamo le equazioni degli assi: se $l = -a_{22}$ e $m = a_{12}$, si ha

$$(a_{11}l + a_{12}m)x_1 + (a_{12}l + a_{22}m)x_2 + (a_{13}l + a_{23}m)x_3 = 0, \qquad \longrightarrow \qquad x_3 = 0.$$

Dunque la parabola ha un solo asse proprio.
Oppure: poiché la parabola è tangente alla retta impropria in C_∞, basta considerare la polare del punto improprio ortogonale a C_∞, per avere l'asse (proprio) della parabola.

(b) Sia a un asse di $\mathscr{C}$ e sia D_a il polo di a. Detto d il diametro ortogonale ad a, si ha che il polo di d è un punto improprio. Poiché d passa per D_∞, il suo polo è un punto della retta a, per il Teorema di Reciprocità. Allora il polo di d è il punto improprio di a, quindi d è ortogonale al proprio polo. Dunque d è il secondo asse di $\mathscr{C}$ e i due assi sono ortogonali.

□

Definizione 8.43. *Si dicono **vertici** di una conica le intersezioni proprie della conica con i propri assi.*

Proposizione 8.44. *Sia V un vertice per $\mathscr{C}$. Allora la tangente in V a $\mathscr{C}$ è a retta passante per V e ortogonale all'asse su cui si trova V.*

Dimostrazione. Sia t_V la retta tangente in V alla conica $\mathscr{C}$e sia a l'asse cui appartiene V. Allora a è la retta polare di D_∞. Per il Teorema di Reciprocità, la polare di V passa per D_∞, ma tale polare è t_V perché $V \in \mathscr{C}$. □

6.3 Forme canoniche per coniche generali

Abbiamo visto che una conica a centro $\mathscr{C}$ ha esattamente due assi, siano essi a_1 ed a_2. Se $\mathscr{C}$ è una parabola essa ha un solo asse a e sia V il vertice, con tangente t_V. Mediante rotazioni e traslazioni, è possibile assumere come assi del sistema di riferimento:

- a_1, a_2 per coniche a centro,

- a, t_V per le parabole,

e pervenire rispettivamente alle seguenti forme:

- $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$, con α, β, γ non nulli;

- $\alpha x^2 = y$ o $x = \alpha' y^2$, con α, α' non nulli.

Si ottengono le equazioni:

- se $\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma}{\beta} > 0$, poniamo $a^2 := \frac{\gamma}{\alpha}$ e $b^2 := \frac{\gamma}{\beta}$, per cui
$$\mathscr{C} \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \textbf{ellisse a punti reali};$$

- se $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, $\frac{\gamma}{\beta} < 0$, poniamo $a^2 := \frac{\gamma}{\alpha}$ e $b^2 := -\frac{\gamma}{\beta}$, per cui
$$\mathscr{C} \ : \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \textbf{iperbole con asse trasverso l'asse } x;$$

- se $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, $\frac{\gamma}{\beta} > 0$, poniamo $a^2 := -\frac{\gamma}{\alpha}$ e $b^2 := \frac{\gamma}{\beta}$, per cui
$$\mathscr{C} \ : \ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad \textbf{iperbole con asse trasverso l'asse } y;$$

- se $\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma}{\beta} < 0$, poniamo $a^2 := -\frac{\gamma}{\alpha}$ e $b^2 := -\frac{\gamma}{\beta}$, per cui
$$\mathscr{C} \ : \ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \textbf{ellisse e punti immaginari}.$$

Nel caso della parabola:

- $y = \alpha x^2$, **parabola ad asse verticale**;

- $x = \alpha' y^2$, **parabola ad asse orizzontale**.

6.4 Iperbole equilatera

Definizione 8.45. *Un'**iperbole** si dice **equilatera** se i suoi asintoti sono ortogonali.*

Teorema 8.46. *Una conica generale $\mathscr{C}$ è un'iperbole equilatera se e solo se una sua equazione in un riferimento cartesiano fissato soddisfa la condizione*

$$a_{11} + a_{22} = 0.$$

Dimostrazione. "$\Longrightarrow$" Sia $\mathscr{C}$ una iperbole equilatera. Consideriamo l'equazione che dà la direzione degli asintoti:

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0. \tag{8.6.3}$$

Si presentano due casi.

I caso $a_{22} = 0$, quindi l'equazione diventa $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm = 0$. Quindi una coppia di soluzioni è $(0, 1)$, per cui un asintoto ha parametri direttori $(0, 1)$, cioè Y_∞. Poiché l'iperbole è equilatera la direzione dell'altro asintoto è $(1, 0)$, cioè X_∞ e quindi anche $(1, 0)$ è soluzione di (8.6.3), cioè $a_{11} = 0$, dunque

$$a_{11} + a_{22} = 0.$$

II caso $a_{22} \neq 0$, allora $l = 0$ non è soluzione di (8.6.3). Possiamo allora dividere per l^2:

$$a_{11} + 2a_{12}\frac{m}{l} + a_{22}\left(\frac{m}{l}\right)^2 = 0.$$

Le due radici t_1 e t_2 di tale equazione sono i coefficienti angolari degli asintoti, che, per ipotesi, sono ortogonali: $t_1t_2 = -1$. D'altra parte il prodotto delle radici di una equazione di secondo grado è il rapporto tra il termine noto e il coefficiente direttivo, cioè

$$t_1t_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}} = -1, \qquad \longrightarrow \qquad a_{11} + a_{22} = 0.$$

□

Teorema 8.47. *In una iperbole equilatera gli asintoti sono le bisettrici degli angoli formati dagli assi.*

Dimostrazione. Non è restrittivo porre l'iperbole in forma canonica:

$$\mathscr{C} \ : \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'iperbole è equilatera se e solo se $a_{11}+a_{22}=0$, cioè $1/a^2-1/b^2=0$, ossia $a^2=b^2$. Dunque l'equazione canonica di un'iperbole equilatera, riferita agli assi, è

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Il centro di $\mathscr{C}$ è $[(0,0,1)]$, per cui l'equazione complessiva degli asintoti è

$$x^2 - y^2 = 0 \ \longrightarrow \ (x+y)(x-y) = 0,$$

cioè gli asintoti sono

$$x+y=0 \qquad \text{e} \qquad x-y=0.$$

Queste due rette sono le bisettrici degli assi del sistema di riferimento, per cui sono le bisettrici degli assi della conica. □

Un una iperbole equilatera anche i due asintoti sono fra loro ortogonali, per cui possiamo scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti, cioè in cui l'asse x e l'asse y sono gli asintoti di $\mathscr{C}$. Il fascio di coniche bitangenti all'asse x nel suo punto improprio e all'asse y nel suo punto improprio è

$$\mathscr{F} \ : \ x_1x_2 + kx_3^2 = 0,$$

da cui

$$xy + k = 0.$$

6.5 Fuochi e direttrici

Definizione 8.48. *Si dice* ***fuoco*** *di una conica generale $\mathscr{C}$ ogni punto F di $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ tale che le tangenti per esso a $\mathscr{C}$ sono le rette isotrope passanti per F.*
La polare di un fuoco F si chiama ***direttrice*** *di $\mathscr{C}$ (coniugata a F).*

Osservazione 8.49. *Le* ***rette isotrope*** *passanti per un punto P sono le rette che congiungono P con i punti ciclici $I = (1, i, 0)$ e $J = (1, -i, 0)$. Se $P = (x_0, y_0)$ allora tali rette sono*

$$\mathrm{rt}(P, I) \ : \ y - y_0 = i(x - x_0), \qquad \mathrm{rt}(P, J) \ : \ y - y_0 = -i(x - x_0).$$

Osservazione 8.50. *Se F è un fuoco allora F è interno a $\mathscr{C}$ perché le tangenti a $\mathscr{C}$ condotte da F sono immaginarie e coniugate.*

Vogliamo vedere quanti sono i fuochi di una conica.
Sia $\mathscr{C}$ una conica a centro, che non sia una circonferenza generalizzata. Quindi $\mathscr{C}$ non passa per i punti ciclici e non è tangente alla retta impropria. Mandiamo da I la tangenti r_1 ed r_1' e da J le tangenti r_2 ed r_2' alla conica $\mathscr{C}$. Poiché i punti I e J sono coniugati, si ha che:

$$r_2 = \overline{r_1} \qquad \text{e} \qquad r_2' = \overline{r_1'}.$$

Le intersezioni a due a due di queste due rette danno i fuochi di $\mathscr{C}$. Essi sono

$$F_1 \ = r_1 \cap r_2 = r_1 \cap \overline{r_1} \implies F_1 \text{ è reale}$$

$$F_2 \ = r_1' \cap r_2' = r_1' \cap \overline{r_1'} \implies F_2 \text{ è reale}$$

$$F_3 \ = r_1 \cap r_2' = r_1 \cap \overline{r_1'} \qquad \text{e} \qquad F_4 \ = r_1' \cap r_2 = r_1' \cap \overline{r_1}$$

$$\implies F_3, F_4 \text{ sono immaginari e coniugati.}$$

Dunque se $\mathscr{C}$ è una conica a centro e non è una circoferenza generalizzata ha 4 fuochi. Di essi due sono reali e due immaginari e coniugati.

Sia $\mathscr{C}$ una circonferenza generalizzata. Allora $I, J \in \mathscr{C}$. Per determinare i fuochi dobbiamo comunque condurre le tangenti da I e da J alla conica $\mathscr{C}$. Siano r_1 e r_2 le tangenti a $\mathscr{C}$ in I e J rispettivamente. Poiché I e J sono coniugati, le due rette sono immaginarie e coniugate. $F = r_1 \cap \overline{r_1}$ è un fuoco reale, ma r_1 e $\overline{r_1}$ sono le tangenti a $\mathscr{C}$ nei suoi punti impropri, perciò sono asintoti. Dunque F è il centro della circonferenza.

Sia ora $\mathscr{C}$ una parabola. Madiamo le tangenti a $\mathscr{C}$ dai punti I e J.
Le tangenti condotte da I sono la retta impropria e ina retta propria immaginaria t; le tangenti condotte da J sono la retta impropria e una retta propria $\bar{t}$, immaginaria e coniugata di t. Dunque $F = t \cap \bar{t}$ è l'unico fuoco reale di $\mathscr{C}$.

Osservazione 8.51. *I fuochi reali di una conica appartengono sempre a uno dei suoi assi.*

7 Esercizi sulle coniche

Esempio 8.52. Studiare la riducibilità della conica

$$\mathscr{C} \; : \; 3x^2 + xy + 6x + 2y = 0.$$

La matrice della conica è

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & 3 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essa ha determinante $\det A = 3/2 + 3/2 - 3 = 0$*, per cui non è generale. Poiché il minore*

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

è non singolare, il rango di A è 2. Allora $\mathscr{C}$ è semplicemente riducibile. Determiniamo il punto doppio P.
Il sistema che dà i punti doppi è $A\boldsymbol{x} = 0$, cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 1/2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 1/2x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0 \\ 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0 \end{array} \right. , \tag{8.7.1}$$

da cui

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 1/2x_1 \\ x_2 = -3x_1 \\ \forall x_1 \end{array} \right. , \tag{8.7.2}$$

quindi $P = [(x_1, -3x_1, -1/2x_1)] = [(-2, 6, 1)]$ è il punto doppio di $\mathscr{C}$. Determiniamo ora le equazioni delle due rette r ed s in cui si spezza la conica.
Si può effettuare la fattorizzazione in modo diretto:

$$3x^2+xy+6x+2y = 3x(x+2)+y(x+2) = (3x+y)(x+2) \implies \mathscr{C} \; : \; (3x+y)(x+2) = 0,$$

quindi

$$r \ : \ x = -2 \qquad s \ : \ y = -3x.$$

Oppure si ricava una delle due variabili in funzione dell'altra:

$$3x^2 + xy + 6x + 2y = 0, \qquad x = \frac{-(y + 6 \pm \sqrt{(y+6)^2 - 24y})}{6}.$$

Risulta

$$x = \frac{-(y+6) \pm (y-6)}{6},$$

da cui

$$x = -2 \qquad e \qquad x = -y/3.$$

Un altro metodo consiste nel trovare i punti impropri A_∞ e B_∞ di $\mathscr{C}$ e congiungerli con il punto doppio P.

(8.7.3)
$$\overline{\mathscr{C}} \cap r_\infty \ : \ \begin{cases} 3x_1^2 + x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1(3x_1 + x_2) = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

per cui il sistema si spezza nei due sistemi

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = -3x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \tag{8.7.4}$$

che hanno rispettivamente soluzione $A_\infty = [(0,1,0)]$ e $B_\infty = [(1,-3,0)]$. Per cui le due rette cha passano per $P = (-2,6)$ e aventi come parametri direttori A_∞ e B_∞ sono, nell'ordine:

$$x = -2 \qquad e \qquad y = -3x.$$

Esempio 8.53. Studiare la conica

$$\mathscr{C} \ : \ x^2 + ky^2 - (1+6k)y + 9k = 0$$

al variare del parametro k.

Vediamo la riducibilità. Consideriamo la matrice della conica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & -\frac{1+6k}{2} \\ 0 & -\frac{1+6k}{2} & 9k \end{bmatrix}.$$

Poiché

$$\det A = 9k^2 - \frac{(1+6k)^2}{4} = \frac{-1-12k}{4},$$

allora $\det A = 0$ *se e solo se* $k = -1/12$.

Per $k = -1/12$, *la conica è riducibile e poiché il minore*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

ha determinante $k = -1/12 \neq 0$, *il rango di* A *è* 2. *Quindi* $\mathscr{C}$ *è semplicemente riducibile. Determiniamo le rette in cui si decompone:*

$$x^2 - \frac{1}{12}y^2 - \left(1 + 6\frac{-1}{12}\right)y + 9\left(-\frac{1}{12}\right) = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{9}{12} = 0$$

$$12x^2 - (y+3)^2 = 0,$$

per cui le due rette hanno equazioni

$$\sqrt{12}x + y + 3 = 0 \qquad e \qquad \sqrt{12}x - y - 3 = 0.$$

Per $k \neq -1/12$ *la conica è generale e il determinante di* M *è* k. *Quindi se* $k > 0$, *allora* $\mathscr{C}$ *è un'ellisse; se* $k < 0$, $\mathscr{C}$ *è una iperbole e se* $k = 0$ $\mathscr{C}$ *è una parabola.*

Studiamo la conica che si ottiene dando al parametro k il valore $-1/3$.

Per tale valore di k *sappiamo che* $\mathscr{C}$ *è un'iperbole. Essa ha equazione*

$$\mathscr{C} \ : \ x^2 - \frac{1}{3}y^2 + y - 3 = 0.$$

Poiché $a_{11} + a_{22} = 1 - 1/3 \neq 0$, *l'iperbole non è equilatera.*

Determiniamo centro, asintoti, assi e vertici.

Centro. *Si ha*

$$\overline{\mathscr{C}} \ : \ x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^2 + x_2x_3 - 3x_3^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -\frac{2}{3}x_2 + x_3,$$

da cui il sistema

$$(8.7.5) \qquad \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ -\frac{2}{3}x_2 + x_3 = 0 \end{cases},$$

quindi $C = \left[\left(0, x_2, \frac{2}{3}x_2\right)\right] = \left[\left(0, 1, \frac{2}{3}\right)\right] = \left[\left(0, \frac{3}{2}, 1\right)\right]$. Asintoti. *L'equazione complessiva degli asintoti è*

$$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0,$$

dove (x_0, y_0) *sono le coordinate del centro, quindi*

$$(x-0)^2\frac{1}{3}\left(y-\frac{3}{2}\right)=0, \longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y-\frac{3}{2}\right).$$

Vediamo un altro modo per determinare le equazioni degli asintoti: determiniamone le direzioni A_∞ *e* B_∞ *attraverso i punti impropri di* $\mathscr{C}$. *Gli asintoti sono le due rette aventi tali direzioni e passanti per il centro.*
I parametri direttori degli asintoti sono dati da

$$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0, \text{ dunque}$$

$$l^2-\frac{1}{3}m^2=0 \longrightarrow l=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}m.$$

Perciò $A_\infty=[(1,\sqrt{3},0)]$ *e* $B_\infty=[(1,-\sqrt{3},0)]$ *e gli asintoti hanno equazioni*

$$y-\frac{3}{2}=\pm,\sqrt{3}(x-0).$$

Assi. *L'equazione che dà le direzioni degli assi è la seguente:*

$$a_{12}l^2+(a_{22}-a_{11})lm-a_{12}m^2=0,$$

che dà $lm=0$. *Pertanto le direzioni degli assi sono*

$$[(0,m,0)]=[0,1,0]=Y_\infty \qquad e \qquad [(l,0,0)]=[1,0,0]=X_\infty.$$

L'iperbole ha dunque assi paralleli all'asse x *e all'asse* y, *di equazioni*

$$a_1 \ : \ y=3/2, \qquad a_2 \ : x=0.$$

Vediamo quale dei due assi è asse trasverso determinando i vertici di $\mathscr{C}$. Vertici. *Risolvendo il sistema*

$$(8.7.6) \qquad \begin{cases} x=0 \\ x^2-\frac{1}{3}y^2+y-3=0 \end{cases}$$

si ottengono le soluzioni

$$x=0, \qquad y=\frac{3\pm\sqrt{9-36}}{2}.$$

L'asse trasverso è $y=3/2$ *e i vertici si ottengono intersecando con* $\mathscr{C}$:

$$(8.7.7) \qquad \begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ x^2-\frac{1}{3}y^2+y-3=0 \end{cases}.$$

Le soluzioni sono $V_1=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ *e* $V_2=\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Esempio 8.54. Determinare la generica conica passante per i punti $A = (0, 1)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, 1)$ e tangente alla retta di equazione $x - y = 0$.

Il punto C appartiene alla retta data, per cui le coniche che cerchiamo sono tutte e sole le coniche del fascio $\mathscr{F}$ di coniche tangenti in C alla retta $t_C\ : x - y = 0$ e passanti per in punti A e B.

Per scriverne l'equazione utlizziamo le coniche degeneri:

$$t_C \cap \mathrm{rt}(A, B), \qquad \mathrm{rt}(A, C) \cap \mathrm{rt}(B, C).$$

Le equazioni di tali rette sono

$$t_C\ :\ x - y = 0, \qquad \mathrm{rt}(A, C)\ :\ y = 1,$$

$$\mathrm{rt}(A, B)\ :\ x + 2y - 2 = 0, \qquad \mathrm{rt}(B, C)\ :\ x + y - 2 = 0.$$

infatti

$$\begin{aligned} \mathrm{rt}(A, B) &= \det \begin{bmatrix} x - 0 & y - 1 \\ 2 - 0 & 0 - 1 \end{bmatrix} = -x - 2(y - 1) = 0, \\ \mathrm{rt}(B, C) &= \det \begin{bmatrix} x - 1 & y - 1 \\ 2 - 1 & 0 - 1 \end{bmatrix} = -(x - 1) - (y - 1) = 0. \end{aligned}$$

Quindi il fascio ha equazione

$$\mathscr{F}\ :\ \lambda(x - y)(x + 2y - 2) + \mu(y - 1)(x + y - 2) = 0$$

o, con un solo parametro "non omogeneo":

$$(x - y)(x + 2y - 2) + k(y - 1)(x + y - 2) = 0.$$

Variante: determinare l'iperbole equilatera passante per $A = (0, 1)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, 1)$ e tangente alla retta di equazione $x - y = 0$.

Una volta determinato il fascio, si deve imporre la condizione $a_{11} + a_{22} = 0$. A conti fatti l'equazione del fascio $\mathscr{F}$ è

$$\mathscr{F}\ :\ x^2 + xy(1 + k) + y^2(k - 2) - x(k + 2) + y(2 - 3k) + 2k = 0.$$

Per cui si impone che $1 + k - 2 = 0$, da cui $k = 1$. La conica richiesta è dunque

$$x^2 + 2xy - y^2 - 3x - y + 2 = 0.$$

Per esercizio: studiare questa iperbole, trovando centro, asintoti, assi e vertici.

Esempio 8.55. Scrivere l'equazione della conica tangente alla parabola $y = x^2$ nei punti in cui essa interseca la retta di equazione $y = 3$ e passante per il punto $P = (3, 0)$. Successivamente riconoscere la conica trovata.

Detti A e B i punti di intersezione tra la parabola e la retta $y = 3$ e dette t_A e t_B le rispettive tangenti alla parabola, la conica che cerchiamo appartiene al fascio di coniche bitangenti in A a t_A e in B a t_B. In questo caso per generare il fascio è utile considerare la parabola $y = x^2$ e la retta $y-3 = 0$, contata due volte. Per cui

$$\mathscr{F} \ : \ (x^2 - y) + k(y-3)^2 = 0.$$

Imponiamo il passaggio per $P = (3, 0)$:

$$9 + k(0-3)^2 = 0, \quad \textit{da cui} \quad k = -1.$$

La conica richiesta è

$$(x^2 - y) - (y-3)^2 = 0, \quad \textit{ovvero} \quad \mathscr{C} \ : \ x^2 - y^2 + 5y - 9 = 0.$$

La sua matrice è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -9 \end{bmatrix},$$

ed ha determinante $9/4$, per cui $\mathscr{C}$ non è riducibile. Infine siccome

$$a_{11} + a_{22} = 1 - 1 = 0,$$

allora $\mathscr{C}$ è un'iperbole equilatera (con gli assi paralleli all'asse x e all'asse y).

Esempio 8.56. Scrivere l'equazione di una conica:

(a) avente centro in $[(0, 0, 1)]$;

(b) avente centro in $[(0, 0, 1)]$ e passante per $P = (1, 1)$;

(c) avente centro in $[(0, 0, 1)]$, passante per $P = (1, 1)$ e avente come retta tangente in P la retta $t_P \ : \ x + y = 2$.

(a) *Consideriamo la generica equazione di una conica*

$$\mathscr{C} \ : \ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Le coordinate del centro C *si ottengono dal sistema*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Imponendo che esso abbia soluzione $[(0,0,1)]$ *si ottiene*

$$\begin{cases} a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 1 = 0 \\ a_{12}\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \ a_{13} = a_{23} = 0.$$

Dunque l'equazione di una conica con centro in $[(0,0,1)]$ *è del tipo*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

(b) *Imponiamo il passaggio per* $P = (1,1)$*. Si ottiene:*

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + a_{33} = 0,$$

da cui $a_{33} = -(a_{11} + 2a_{12} + a_{22})$*, quindi*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 - (a_{11} + 2a_{12} + a_{22})x_3^2 = 0.$$

(c) *Anche il punto* P'*, simmetrico di* P *rispetto a* C *è un punto della conica* $\mathscr{C}$ *e la retta* t'_P*, simmetrica di* t_P *rispetto al centro* C *quindi ad essa parallela, è tangente a tutte le coniche del fascio. Quindi* $\mathscr{C}$ *appartiene al fascio di coniche bitangenti in* P *alla retta* t_P *e in* P' *alla retta* t'_P*. Le coniche degeneri sono la retta* $\mathrm{rt}(C,P)$ *contata due volte e* $t_P \cap t'_P$*. Le loro equazioni sono:*

$$\mathrm{rt}(C,P) \ : \ y = x, \qquad t_P \ : \ x + y - 2 = 0, \qquad t_P \ : \ x + y + 2 = 0.$$

Il fascio $\mathscr{F}$ *ha quindi equazione*

$$(x+y-2)(x+y+2)+k(x-y)^2 = 0 \ \longrightarrow \ x^2(1+k)+2xy(1-k)+y^2(1+k)-4 = 0.$$

Osserviamo che la retta $\mathrm{rt}(C,P)$*, che è un diametro, è perpendicolare a* t_P*, quindi la coniche che abbiamo ottenuto hanno per assi la retta* $\mathrm{rt}(C,P)$ *e* *la retta passante per* C *e ortogonale a* t_P. *Dunque* P *e* P' *sono vertici di queste coniche. Avremmo perciò potuto anche imporre alla generica conica di centro* $C = (0,0)$ *che avesse come direzioni degli assi* $(1,1,0)$ *e* $(1,-1,0)$, *cioè nell'equazione*

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0$$

imporre il passaggio per $(1,1,0)$ *e* $(1,-1,0)$*:*

$$\begin{cases} a_{12} + (a_{22} - a_{11}) - a_{12} = 0 \\ a_{12} - (a_{22} - a_{11}) - a_{12} = 0 \end{cases}, \quad \textit{cioè} \quad \begin{cases} a_{22} = a_{11} \\ a_{22} = a_{11} \end{cases}.$$

Quindi

$$\mathscr{C} \ : \ a_{11}x_1^2 - 2a_{12}x_1x_2 + a_{11}x_2^2 + a_{33} = 0.$$

Imponiendo il passaggio per $(1,1)$ *si ottiene* $a_{33} = -2(a_{11} + a_{12})$, *perciò*

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2 - 2) + a_{12}(2x_1x_2 - 2) = 0.$$

Le coniche generatrici del fascio sono $x^2 + y^2 = 2$, *circonferenza di centro* $(0,0)$ *e raggio* $\sqrt{2}$ *e* $xy = 1$, *iperbole equilatera riferita agli asintoti.*

Bibliografia

[1] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri.

[2] M. Abate, *Geometria*, McGraw-Hill.

Indice analitico